MINISTERUL ŞTIIN Ţ EI ŞI INVĂŢAMĬNTULUI AL R.S.S. MOLDOVA

UNIVERSITATEA DE STAT DIN MOLDOVA

Catedra de Analiză Matematică

Gheorghe I.Rusu

ANALIZA FUNC Ţ IONALĂ I

(SPAŢII METRICE, SPAŢII NORMATE ŞI SPAŢII HILBERT)

Lucrare didactică

Aprobată

de Consiliul facultăţii de

matematică si cibernetică a

Universităţii de Stat din Moldova

Chişinău - 1991

Gheorghe I.Rusu. Analiza funcţionala I (Spaţii metrice,spaţii normate şi spaţii Hilbert) : Lucrare didactica . – Chisinau : U.S.M.,1991

Recomandata de catedra de analiza matematica.

Redactor responsabil - M.A.BARCARI, conferenţiar universitar

Recenzenţi : A.E.BARBAROSIE, candidat in stiinţe fizico-matematice;

A.A.SEMENŢUL, conferenţiar universitar

C U P R I N S

I. SPAŢII METRICE

Prezenta lucrare este adresată studenţilor care studiază analiza funcţională la facultăţile de matematică. Conţinutul lucrării corespunde acelui compartiment al programei de analiză functională ce prevede studierea spaţtiilor metrice, spaţiilor normate şi spaţiilor Hilbert şi reprezintă, de fapt, cursul de prelegeri susţnut de autor in decursul mai multor ani la facultatea de matematică si cibernetică a Universitaţii de Stat din Moldova.

In lucrare se examinează un şir de exemple in vederea ilustrarii aplicaţiilor şi aprofundării materiei teoretice. Un numar suficient de astfel de exemple cititorul poate găsi in [8].

Deşi lucrarea este adresata nemijlocit studenţilor ce studiază analiza functională, ea poate fi folosită si in cadrul studierii cursurilor de analiză matematică şi de topologie.

Autorul aduce sincere mulţămiri docentilor M.A.Barcari si A.A.Semenţul care au luat cunostinţă de lucrare, contribuind la imbunătăţirea acesteia.

\

I.SPAŢII METRICE

§ 1. Spaţii metrice. Exemple.

În analiza matematică se studiază cîteva definiţii a noţiunii de limită: limita unui şir de numere reale, limita unui şir de vectori n-dimensionali, limita unui şir uniform convergent de funcţii, etc. Dacă analizăm atent aceste definiţii, observăm, că toate au ceva comun, şi anume: şirul $\{x_n\}_1^\infty$ (de numere, vectori n-dimensionali, funcţii) converge către x, dacă „distanţa" dintre x_n şi x tinde către zero. În dependenţă de natura elementelor şi de faptul cum înţelegem „distanţa" dintre elemente obţinem definiţia noţiunii de limită sub diferite forme. Această situaţie ne sugerează ideea de a introduce pentru elementele unor mulţimi o definiţie generală a distanţei care ar generaliza cazurile particulare menţionate mai sus şi încă multe altele.

Pentru orice două mulţimi nevide X şi Y vom nota prin $X \times Y$ produsul cartezian al acestor mulţimi, adică mulţimea

$$X \times Y = \{ (x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

<u>Definiţia 1</u>. Se numeşte distanţă (sau metrică) într-o mulţime X orice funcţie nenegativă $\rho : X \times X \to$ R ce posedă următoarele proprietăţi (axiomele distanţei):

1) $\rho (x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$;
2) $\rho (x, y) = \rho (y, x)$ oricare ar fi $x, y \in X$;
3) $\rho (x, z) \le \rho (x, y) + \rho (y, z)$ pentru orice $x, y, z \in X$ (inegalitatea triunghiului).

<u>Observaţie</u>. Din axiomele 1-3 rezultă, că funcţia $\rho : X \times X \to R$ este nenegativă.

Într-adevăr, $0 = \rho (x, x) \le \rho (x, y) + \rho (y, x) = 2 \rho (x,y)$.

Prin urmare, în definiţia distanţei condiţia, conform căreia se cere că funcţia

$\rho : X \times X \to R$ să fie nenegativă, poate fi omisă.

<u>Definiţia 2</u>. Se numeşte spaţiu metric orice mulţime nevidă în care este definită o distanţă.

Spaţiul metric se notează prin (X, ρ) sau X_ρ. Dacă este clar, despre ce metrică este vorba, vom scrie simplu X. Elementele unui spaţiu metric se mai numesc şi puncte.

Fie (X, ρ) un spaţiu metric oarecare. Dacă Y este o submulţime nevidă a mulţimii X, atunci, considerînd pe Y aceeaşi distanţa între elementele ei ca şi în X, obţinem un spaţiu metric nou (Y, ρ) care se numeşte subspaţiu al spaţiului metric (X, ρ).

Menţionăm cîteva proprietăţi ale distanţei.

1) Pentru orice $\{x_k\}_1^n \subset X$ $(n \in \mathbb{N})$ are loc inegalitatea $\rho(x_1, x_n) \leq$ $\leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \ldots + \rho(x_{n-1}, x_n)$, numită inegalitatea poligonului (prin analogie cu axioma triunghiului). Această proprietate se obţine direct din 3), utilizînd metoda inducţiei matematice.
2) Pentru orice $x, x', y, y' \in X$ este adevărată inegalitatea
$$|\rho(x, y) - \rho(x', y')| \leq \rho(x, x') + \rho(y, y'), \tag{1}$$

numită inegalitatea patrulaterului. Conform proprietăţii 1) avem

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x') + \rho(x', y') + \rho(y', y), \text{ sau } \rho(x, y) - \rho(x', y') \leq \rho(x, x') + \rho(y, y') \tag{2}$$

În mod analog obţinem

$$\rho(x', y') - \rho(x, y) \leq \rho(x, x') + \rho(y, y') \text{ sau} - (\rho(x, y) - \rho(x', y')) \leq \rho(x, x') + \rho(y, y') \tag{3}$$

Din (2) şi (3) rezultă (1).

<u>Exemple</u>.

1. Fie $X = C$ mulţimea numerelor complexe, sau $X = R$ mulţimea numerelor reale, sau $X = Q$ mulţimea numerelor raţionale. Funcţia $\rho(x, y) = |x - y|$ $(x, y \in X)$ defineşte o distanţă în X. Axiomele 1 -3 ale metricii se verifică nemijlocit şi deci (X, ρ) este un spaţiu metric. Spaţiul metric R este un subspaţiu al spaţiului metric C, iar Q este un subspaţiu al spaţiului metric R şi al spaţiului metric C.

2. Fie X o mulţime nevidă arbitrară. Să arătăm că funcţia

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, x \neq y, \\ 0, x = y \end{cases}$$

defineşte o distanţă pe X.

Axiomele 1) şi 2) evident sînt satisfăcute. Vom demonstra că este satisfăcută şi axioma 3). Este suficient să considerăm cazul $x \neq z$. Relaţiile $x = y$ şi $y = z$ implică $x = z$ şi deci în cazul $x \neq z$ are loc cel puţin una dintre relaţiile $x \neq y$, $y \neq z$. De aici rezultă că partea dreaptă a inegalităţii triunghiului este egală cu 1 sau 2, în timp ce partea stîngă este egală cu 1. Astfel este satisfăcută şi 3). Spaţiul metric obţinut se numeşte spaţiu metric discret sau spaţiu metric al punctelor izolate.

Acest exemplu ne arată că metrica poate fi definită pe orice mulţime nevidă şi, prin urmare, orice mulţime nevidă poate fi organizată ca spaţiu metric.

3 .Fie S mulţimea tuturor şirurilor numerice. În S distanţa poate fi definită prin formula:

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1+|\xi_k - \eta_k|} \quad (x = (\xi_k)_1^{\infty},\ y = (\eta_k)_1^{\infty}). \qquad (4)$$

Proprietăţile metricii 1) şi 2) sunt evidente. Să demonstrăm proprietatea 3).

Pentru aceasta observăm că funcţia $f(t) = \frac{t}{1+t}$ $(t \geq 0)$ este crescătoare $\left(f(t) = = 1 - \frac{1}{1+t}\right)$. Dacă $z = (\zeta_k)_1^{\infty}$, atunci

$$|\xi_k - \eta_k| = |(\xi_k - \zeta_k) + (\zeta_k - \eta_k)| \leq |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|$$

şi deci

$$\frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} = f(|\xi_k - \eta_k|) \leq f(|\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|) =$$

$$= \frac{|\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} = \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k|} +$$

$$+\frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|+|\zeta_k-\eta_k|}\leq\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}+\frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\zeta_k-\eta_k|}.$$

De aici

$$\rho(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\frac{|\xi_k-\eta_k|}{1+|\xi_k-\eta_k|}\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot\left(\frac{|\xi_k-\zeta_k|}{1+|\xi_k-\zeta_k|}+\frac{|\zeta_k-\eta_k|}{1+|\zeta_k-\eta_k|}\right)=$$

$$=\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Aşadar, mulţimea tuturor şirurilor numerice S cu distanţa definită prin formula (4) , într-adevăr formează un spaţiu metric.

4. Fie X mulţimea tuturor funcţiilor continue pe segmentul $[a, b]$. Să arătăm că prin formula

$$\rho(x,y)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|$$

se defineşte o distanţă în X.

Avem : $\rho(x,y)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|=0$ dacă şi numai dacă $x(t) - y(t) = 0$ pentru orice $t \in [a, b]$ sau $x(t) = y(t)$ pentru orice $t \in [a, b]$, adică $x = y$. Proprietatea a doua a distanţei este evidentă.

Să demonstrăm ultima proprietate. Fie x, y, z trei elemente din X. Avem:

$$|x(t)-z(t)|\leq|x(t)-y(t)|+|y(t)-z(t)|\leq$$

$$\leq\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|+\max_{a\leq t\leq b}|y(t)-z(t)|=\rho(x,y)+\rho(y,z)$$

şi deci

$$\rho(x,z)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-z(t)|\leq\rho(x,y)+\rho(y,z).$$

Spaţiul metric obţinut se notează prin $C[a, b]$.

5. Fie l_∞ mulţimea tuturor şirurilor mărginite de numere reale sau complexe. Funcţia

$$\rho(x,y) = \sup_n |\xi_n - \eta_n| \quad (\ (x = (\xi_n)_1^\infty, \qquad y = (\eta_n)_1^\infty) \ ) \qquad (5)$$

defineşte o distanţă în l_∞ şi deci l_∞ este un spaţiu metric cu distanţa (5).

Proprietăţile distanţei l) – 3) se verifică fără dificultate.

6. Spaţiul metric c_0 este format din toate şirurile de numere reale sau complexe, convergente la zero. Distanţa în c_0 se defineşte prin formula

$$\rho(x,y) = \max_n |\xi_n - \eta_n|, \quad (\ (x = (\xi_n)_1^\infty, \qquad y = (\eta_n)_1^\infty) \ )$$

Spaţiul c_0 este un subspaţiu al spaţiului metric l_∞.

§ 2. Inegalităţile Young, Hölder şi Minkowski

Fie $p > 1$ un număr real şi q - numărul real adjunct al lui p, adică $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

<u>Inegalitatea Young</u>: Pentru orice numere reale sau complexe a şi b are loc inegalitatea

$$|ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} \qquad (1)$$

Demonstraţie. Inegalitatea (1) este evidentă , dacă $a = 0$ sau $b = 0$. Admitem că $ab \neq 0$. Considerăm funcţia $f(x) = \frac{x^p}{p} - x, x \geq 0)$. Derivata acestei funcţii $f'(x) = x^{p-1} - 1$ ia valoarea zero numai în punctul $x = 1$. Punctul $x = 1$ este un punct de minim al funcţiei f (deoarece $f''(1) = p - 1 > 0$) şi deci

$$f(x) = \frac{x^p}{p} - x \geq f(1) = \frac{1}{p} - 1 = -\frac{1}{q}.$$

De aici

$$x \leq \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} \quad (x \geq 0). \qquad (2)$$

Punem în această inegalitate $x = |a| \times |b|^{1-q}$ şi obţinem

$$x = |a| \times |b|^{1-q} \leq \frac{|a|^p \times |b|^{p-pq}}{p} + \frac{1}{q} \qquad (3)$$

Înmulţind ambele părţi ale ultimei inegalităţi cu $|b|^q$ (ţinînd cont de relaţia $p + q = p \times q$) , ajungem la inegalitatea (1). Deoarece inegalitatea (2) devine o egalitate dacă şi numai dacă $x = 1$, rezultă că inegalitatea (3), şi deci şi (1), devine o egalitate dacă şi numai dacă $|a|^p \times |b|^{p-pq} = 1$ sau $|a|^p = |b|^q$.

Inegalitatea Hölder. Fie $1 < p < \infty$; $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Pentru orice două sisteme de numere reale sau complexe $\{a_j\}_1^n$, $\{b_j\}_1^n$ are loc inegalitatea

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (4)$$

Demonstraţie. Fie

$$A = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{1/p} \quad şi \quad B = \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{1/q}.$$

Inegalitatea (4) este evidentă, dacă $A = 0$ sau $B = 0$. Vom presupune deci că $AB \neq 0$. Aplicăm inegalitatea Young numerelor $a'_j = \frac{a_j}{A}$, $b'_j = \frac{b_j}{B}$. Avem

$$|a'_j b'_j| \leq \frac{|a'_j|^p}{p} + \frac{|b'_j|^q}{q},$$

$$\frac{|a_j b_j|}{AB} \leq \frac{|a_j|^p}{pA^p} + \frac{|b_j|^q}{qB^q}. \qquad (5)$$

Adunăm aceste inegalităţi şi obţinem

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|a_j b_j|}{AB} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_j|^p}{pA^p} + \sum_{j=1}^{n} \frac{|b_j|^q}{qB^q} = \frac{1}{pA^p} \cdot A^p + \frac{1}{qB^q} \cdot B^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

De aici

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq A \cdot B\ ,$$

ceea ce trebuia de demonstrat.

Trecînd în ultima inegalitate la limita cu $n \to \infty$, obţinem inegalitatea Holder pentru şiruri de numere (reale sau complexe)

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (6)$$

E bine să observăm că dacă seriile din partea dreaptă a inegalităţii (6) sînt convergente, atunci este convergentă şi seria din partea stîngă a ei.

Notă. Fără dificultate se constată că inegalităţile (4) şi (6) se transformă în egalităţi, dacă şi numai dacă inegalităţile (5) se transform în egalităţi, adică

$$|a_j'|^p = |b_j'|^q, \quad \frac{|a_j|^p}{A^p} = \frac{|b_j|^q}{B^q} \quad (j = 1,2, \dots)$$

sau $|a_j|^p = \lambda |b_j|^q$ $(j = 1,2, \dots)$.

Demonstraţia o lăsăm pe seama cititorului.

Prin raţionamente similare se stabileşte şi inegalitatea Holder pentru funcţii.

Dacă $x, y \in C[a, b]$, $p > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, atunci

$$\int_a^b |x(t) \cdot y(t)| dt \leq \left(\int_a^b |x(t)^p| dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{1/q}.$$

Să demonstrăm în continuare inegalităţile Minkowski

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_j+b_j\right|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n}\left|b_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1), \tag{7}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_j+b_j\right|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|b_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1), \tag{8}$$

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^q dt\right)^{1/p} \quad (p \geq 1),$$

$x, y \in C[a, b]$. (9)

Inegalităţile (7)-(9) sunt evidente pentru $p = 1$. Dacă p > 1, atunci în virtutea inegalităţii Hölder avem

$$\sum_{j=1}^{n}\left|a_j+b_j\right|^p = \sum_{j=1}^{n}\left|a_j+b_j\right| \cdot \left|a_j+b_j\right|^{p-1}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\left|a_j\right| \cdot \left|a_j+b_j\right|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n}\left|b_j\right| \cdot \left|a_j+b_j\right|^{p-1} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_j\right|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_j+b_j\right|^{(p-1)q}\right)^{1/q} + \left(\sum_{j=1}^{n}\left|b_j\right|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_j+b_j\right|^{(p-1)q}\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_j+b_j\right|^p\right)^{1/q} \cdot \left(\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_j\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n}\left|b_j\right|^p\right)^{1/p}\right).$$

Împărţim acum prin $\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_j+b_j\right|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ şi obţinem (ţinînd cont de egalitatea $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_j+b_j\right|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_j\right|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n}\left|b_j\right|^p\right)^{1/p} \quad (p \ge 1)$$

În mod analog se stabileşte şi inegalitatea (9). Prin trecere la limită în inegalitatea (7) obţinem inegalitatea (8).

Menţionăm că convergenţa seriilor din partea dreaptă a inegalităţii (8) implică convergenţa seriei din partea stîngă.

§ 3. Spaţiile metrice C^m, R^m, $l_p^{(m)}$, $l_\infty^{(m)}$. l_p, $C_p[a, b]$

1. Spaţiul metric C^m este format din mulţimea tuturor sistemelor $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ de m numere complexe cu distanţa

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{m}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{1/2} \quad (x=(\xi_k)_1^m,\ y=(\eta_k)_1^m) \qquad (1)$$

Să arătăm că formula (1) într-adevăr defineşte o distanţă. Proprietăţile 1) $-$2) ale distanţei sînt evidente. Vom demonstra proprietatea triunghiului. Fie $z=(\zeta_k)_1^m$. Utilizăm inegalitatea Minkowski şi obţinem

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{m}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{m}|(\xi_k-\zeta_k)+(\zeta_k-\eta_k)|^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{m}|\xi_k-\zeta_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{m}|\zeta_k-\eta_k|^2\right)^{1/2} = \rho(x,z)+\rho(z,y).$$

2. Spaţiul metric R^m este format din mulţimea sistemelor $x=(\xi_k)_1^m$ de m numere reale cu distanţa

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_k - \eta_k|^2\right)^{1/2} \ (x = (\xi_k)_1^m,\ y = (\eta_k)_1^m).$$

Este evident că spaţiul R^m este un subspaţiu al spaţiului metric C^m.

3.Fie X mulţimea tuturor sistemelor $x = (\xi_k)_1^m$ de m numere reale sau complexe şi $p \geq 1$. În mulţimea X definim distanţa astfel

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_k - \eta_k|^p\right)^{1/p} \ (x = (\xi_k)_1^m,\ y = (\eta_k)_1^m)\,|\,.$$

Proprietăţile 1) −2) ale distanţei sînt evidente. Proprietatea 3) se obţine cu ajutorul inegalităţii Minkowski. Fie $z = (\zeta_k)_1^m$. Avem

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k - \eta_k|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{m} |(\xi_k - \zeta_k) + (\zeta_k - \eta_k)|^p\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k - \zeta_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{m} |\zeta_k - \eta_k|^p\right)^{1/p} = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Spaţiul metric obţinut se notează prin $l_p^{(m)}$.

3. În mulţimea X a tuturor sistemelor de m numere reale sau complexe definim distanţa prin formula

$$\rho(x,y) = \max_{l \leq k \leq m} |\xi_k - \eta_k| \quad (x = (\xi_k)_1^m, \qquad y = (\eta_k)_1^m)$$

Axiomele distanţei se verifică nemijlocit. Spaţiul metric obţinut se va nota cu $l_\infty^{(m)}$.

5. Fie $1 \leq p < \infty$. Vom nota cu l_p mulţimea tuturor şirurilor de numere reale sau complexe $x = (\xi_n)_1^\infty$, pentru care seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p$$

este convergentă. Distanţa în l_p se va defini prin formula

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|^p\right)^{1/p} \qquad (x=(\xi_n)_1^{\infty}, \qquad y=(\eta_n)_1^{\infty}) \qquad (2)$$

Convergenţa seriei (2) rezultă imediat din inegalitatea Minkowski.

Proprietăţile 1) şi 2) ale distanţei sînt evidente, iar proprietatea 3) se deduce utilizînd inegalitatea Minkowski.

6. Spaţiul $C_p[a, b]$ ($1 \le p < \infty$) este format din mulţimea tuturor funcţiilor continue pe segmentul $[a, b]$ cu distanţa

$$\rho(x,y)=\left(\int_a^b|x(t)-y(t)|^p dt\right)^{1/p} \quad (x, y \in C_p[a, b]).$$

Deoarece funcţia $|x(t)-y(t)|^p$ este continuă şi nenegativă, integrala definită a ei este egală cu zero, dacă şi numai dacă această funcţie este egală cu zero.

Prin urmare: $\rho(x,y)=0$ dacă şi numai dacă $x=y$.

Proprietatea 2) este evidentă, iar proprietatea 3) rezultă din inegalitatea Minkowski pentru funcţii (utilizăm procedeul din exemplul 3).

§ 4. Convergenţa într-un spaţiu metric

<u>Definiţia 1</u>. Şirul $\{x_n\}_1^{\infty}$ de puncte ale spaţiului metric X se numeşte convergent, dacă există un punct $a \in X$ cu propretatea

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,a)=0,$$

adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$, astfel încît $\rho(x_n,a)<\varepsilon$ pentru orice $n \ge n_0$.

Punctul a în acest caz se numeşte limita şirului $\{x_n\}_1^{\infty}$ şi se scrie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

sau $x_n \to a$.

Din această definiţie imediat rezultă

<u>Teorema 1</u>. Dacă şirul $\{x_n\}_1^\infty$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

atunci orice subşir $\{x_{n_k}\}_1^\infty$ al acestui şir de asemenea este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = a.$$

<u>Teorema 2</u>. Limita oricărui şir convergent este unică.

Demonstraţie. Fie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = b.$$

Utilizînd inegalitatea triunghiului, obţinem

$$0 \le \rho(a,b) \le \rho(a,x_n) + \rho(x_n,b) \to 0$$

şi deci $\rho(a, b) = 0$, ceea ce implică $b = a$.

<u>Definiţia 2</u>. Se numeşte sferă (sau sferă deschisă) cu centrul a şi de rază r în spaţiul metric X mulţimea

$$S(a, r) = \{x \in X: \rho(x, a) < r\}.$$

Orice sferă cu centrul în punctul a se numeşte vecinătate a acestui punct.

Utilizînd noţiunea de vecinătate, putem afirma că şirul $\{x_n\}_1^\infty$ converge către punctul $a \in X$, dacă orice vecinătate a acestui punct conţine termenii şirului $\{x_n\}_1^\infty$ cu excepţia unui număr finit de termeni.

Definiţia 3. Mulţimea $M \subset X$ se numeşte mărginită, dacă există o sferă $S(a, r)$ care conţine mulţimea M.

Observaţie. Dacă mulţimea M este mărginită şi $M \subset S(a, r)$ atunci pentru orice $b \in X$ există un număr pozitiv τ astfel încît $M \subset S(b; \tau)$.

E suficient să punem $\tau = r + \rho(a, b)$. Într-adevăr, dacă $x \in M$, atunci $\rho(x, a) < r$ şi deci

$$\rho(x, b) \leq \rho(x, a) + \rho(a, b) < r + \rho(a, b) = \tau,$$

adică $x \in S(b, \tau)$.

Teorema 3. Orice şir convergent este mărginit.

Demonstraţie. Fie

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \ \text{ şi } \varepsilon = 1.$$

Există $n_0 \in N$ astfel încît $\rho(x_n, b) < 1$ pentru orice $n \geq n_0$. Dacă $r = 1 + \max\{\rho(x_1, a), \ldots, \rho(x_{n0}, a), 1\}$ atunci, evident, $\rho(x_n, a) < r$ $(n = 1, 2, \ldots)$ şi deci $\{x_n\}_1^\infty \subset S(a, r)$.

Afirmaţia reciprocă acestei teoreme nu este adevărată. De exemplu, şirul $\{(-1)^n\}_1^\infty$ este mărginit în spaţiul metric R, însă nu este convergent.

Teorema 4. În orice spaţiu metric distanţa este o funcţie continuă, adică relaţiile

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \qquad \lim_{n \to \infty} y_n = b$$

implică

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(a, b).$$

Demonstraţie. Din inegalitatea patrulaterului imediat rezultă:

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(a, b)| \leq \rho(x_n, a) + \rho(y_n, b) \to 0$$

şi deci

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(a, b).$$

Să ne oprim mai amănunţit la studiul convergenţei în unele spaţii metrice concrete.

<u>Teorema 5</u>. Convergenţa în spaţiul metric R^m (C^m) este echivalentă cu convergenţa în coordonare, adică şirul $\{x_n\}_1^\infty$, $x_n = \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_m^{(n)}\right)$ converge în $R^m(C^m)$ la $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ dacă şi numai dacă $\xi_1^{(n)} \to a_1$, $\xi_2^{(n)} \to a_2$, $\dots, \xi_m^{(n)} \to a_m$.

Demonstraţie. Vom demonstra teorema pentru spaţiul C^m.

Pentru început demonstrăm inegalităţile

$$\max_{1 \le k \le m} |\xi_k| \le \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\xi_j\right|^2 \right)^{1/2} \le \sqrt{m} \cdot \max_{1 \le k \le m} \left|\xi_j\right|. \qquad (1)$$

Avem

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left|\xi_j\right|^2 \right)^{1/2} \ge (0 + \dots + 0 + |\xi_k|^2 + 0 + \dots 0)^{1/2} = |\xi_k|$$

pentru orice $k = 1, 2, \dots, m$, ceea ce implică inegalitatea

$$\max_{1 \le k \le m} |\xi_k| \le \left(\sum_{j=1}^{m} \left|\xi_j\right|^2 \right)^{1/2} .$$

Pe de altă parte

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \left|\xi_j\right|^2 \right)^{1/2} \le \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\max_{1 \le k \le m} |\xi_k| \right)^2 \right)^{1/2} = \sqrt{m} \cdot \max_{1 \le k \le m} |\xi_k|.$$

Din inegalitatea (1) obţinem

$$\max_{1\le k\le m}\left|\xi_k^{(n)}-a_k\right| \le \left(\sum_{j=1}^{m}\left|\xi_j^{(n)}-a_j\right|^2\right)^{1/2} = \rho(x_n,a) \le \sqrt{m}\max_{1\le k\le m}\left|\xi_k^{(n)}-a_k\right| ,$$

ceea ce în mod evident implică afirmaţia teoremei.

Teorema 6. Convergenţa în spaţiul l_p implică convergenţa în coordinate (către acelaşi element).

Demonstraţie. Fie $x_n = (\xi_j^{(n)})_1^{\infty}$, $a = (a_j)_1^{\infty} \in l_p$, şi $x_n \to a$ în spaţiul l_p. Este evident că

$$\left|\xi_k^{(n)}-a_k\right| \le \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j^{(n)}-a_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \rho(x_n,a) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Întrucît $\rho(x_n,a) \to 0$, avem $\xi_k^{(n)} \to a_k$ (k=1, 2,...).

Afirmaţia reciprocă nu este adevărată. Este suficient să observăm că şirul $\{e_n\}_1^{\infty}$ (e_n = (0, …,0, 1, 0, ...)) converge în coordonate către 0 = (0, 0, …). În acelaşi timp ρ (e_n, 0) = 1 pentru orice $n \in N$ şi deci şirul $\{e_n\}_1^{\infty}$ nu converge la 0 în l_p.

În mod analog se demonstrează că convergenţa în spaţiile l_∞ şi c_0 implică convergenţa în coordonate, iar afirmaţia reciprocă nu este adevărată.

Teorema 7. Convergenţa în spaţiul $C[a, b]$ este echivalentă cu convergenţa uniformă a şirului respectiv de funcţii.

Demonstraţie. Fie x, $x_n \in C[a, b]$. Conform definiţiei convergenţei într-un spaţiu metric, şirul $\{x_n\}_1^{\infty}$ converge către x, dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$, astfel încît

$$\rho(x_n,x) < \varepsilon \quad \text{oricare ar fi } n \ge n_0. \tag{2}$$

În spaţiul $C[a, b]$ inegalitatea (2) ia forma

$$\max_{a \le t \le b} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Această inegalitate, evident ,este echivalentă cu inegalitatea

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \quad (\mathrm{a} \le \mathrm{t} \le \mathrm{b}).$$

Prin urmare, şirul $\{x_n\}_1^\infty$converge către x în spaţiul $C[a,\ b]$, dacă şi numai dacă pentru orice ε > 0 există $n_0\ (\varepsilon) \in N$, astfel încît

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \qquad (n \ge n_0, \mathrm{a} \le \mathrm{t} \le \mathrm{b}),$$

ceea ce coincide cu convergenţa uniformă a şirului de funcţii $\{x_n(t)\}_1^\infty$ către $x(t)$.

<u>Teorema 8</u>. Convergenţa şirului $\{x_n\}_1^\infty$ în spaţiul $C\ [a,\ b]$ către x implică convergenţa şirului $\{x_n\}_1^\infty$ către acelaşi punct în spaţiul $C_p[a,\ b]$.

Demonstraţia rezultă imediat din inegalitatea:

$$\rho_{C_p}(x_n, x) \le (b-a)^{\frac{1}{p}} \cdot \rho_C(x_n, x).$$

Ultima inegalitate se demonstrează astfel:

$$\rho_{C_p}(x_n, x) = \left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p dt \right)^{1/p} \le \left(\int_a^b \max_{a \le t \le b} |x_n(t) - x(t)|^p\, dt \right)^{1/p} =$$

$$= \left(\int_a^b |\rho_C(x_n, x)|^p dt \right)^{1/p} = (b-a)^{\frac{1}{p}} \cdot \rho_C(x_n, x).$$

Afirmaţia reciprocă acestei teoreme nu este adevărată. Iată exemplul respectiv: şirul $(\{y_n\}_1^\infty \ \ (y_n = t^n)$ în $C_p[0,1]$ converge către 0, însă în $C\ [0;\ 1]$ nu converge către 0 (este diverjent !).

În mod direct se demonstrează că în spaţiul S convergenţa este echivalentă cu convergenţa în coordonate.

§ 5. Mulţimi deschise şi mulţimi închise

Noţiunile de mulţime deschisă şi de mulţime închisă într-un spaţiu metric, precum şi unele proprietăţi ale lor, sînt cunoscute din cursul de analiză matematică. Avînd în vedere însă importanţa lor, am găsit de cuviinţă să amintim proprietăţile principale ale acestor clase de mulţimi.

Fie X un spaţiu metric şi M o mulţime din X.

Definiţia 1. Se zice că punctul $x \in M$ este punct interior al mulţimii M, dacă există o vecinătate $S(x, \varepsilon)$ a acestui punct , astfel încît $S(x, \varepsilon) \subset M$.

Definiţia 2. Mulţimea M se numeşte deschisă dacă ea este formată numai din puncte interioare, adică pentru orice $x \in M$ există $S(x, \varepsilon) \subset M$.

<u>Exemple:</u>

a) În spaţiul metric R mulţimea $M = (a, b)$ este deschisă, iar $M_1 = [a, b)$ nu este deschisă (punctul a nu este punct interior al mulţimii M).
b) Într-un spaţiu metric arbitrar X orice sferă $S(a, r)$ este o mulţime deschisă. Într-adevăr, fie $x_0 \in S(a, r)$. Punem $r_1 = r - \rho(x_0, a) > 0$ şi vom arăta că $S(x_0, r_1) \subset S(a, r)$. Dacă $x \in S(x_0, r_1)$, atunci $\rho(x, a) \leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, a) < r_1 + \rho(x_0, a) = r$, adică $x \in S(a, r)$. Prin urmare, sfera $S(a, r)$ împreună cu orice punct x_0 conţine şi o vecinătate a acestui punct şi deci mulţimea este deschisă.
c) Orice spaţiu metric X este, evident, o mulţime deschisă.

<u>Teorema 1</u>. Reuniunea oricărei familii de mulţimi deschise este o mulţime deschisă. Intersecţia unui număr finit de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

Demonstraţie. Fie $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un sistem de mulţimi deschise şi

$$G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha.$$

Dacă $x_0 \in G$, atunci x_0 aparţine cel puţin unei mulţimi G_{α_0}. Mulţimea G_{α_0}, fiind deschisă, conţine o sferă $S(x_0, r)$. Însă $G \supset G_{\alpha_0} \supset S(x_0, r)$ şi deci mulţimea G este deschisă. Fie acum

$$G = \cap_{j=1}^{m} G_j \ ,$$

unde G_j sînt mulţimi deschise.

Dacă $x_0 \in G$, atunci $x_0 \in G_j$ şi deci există $\varepsilon_j > 0$, astfel încît $G_j \supset S(x_0, \varepsilon_j)$, $j = 1, 2, ..., m$. Pentru

$$\varepsilon = \min_{l \le j \le m} \varepsilon_j > 0$$

avem: $S(x_0, \varepsilon) \subset S(x_0, \varepsilon_j) \subset G_j$ ($j = 1, 2, ..., m$) şi deci

$$S(x_0, \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{m} G_j = G.$$

Aşadar, mulţimea G conţine punctul x_0 împreună cu o vecinătate $S(x_0, \varepsilon)$ şi deci orice $x_0 \in G$ este un punct interior al acestei mulţimi, adică G este deschisă.

Definiţia 3. Se zice că punctul $x_0 \in X$ este punct de aderenţă al mulţimii $M \subset X$, dacă $S(x_0, \varepsilon) \cap M \neq \varnothing$ oricare ar fi $\varepsilon > 0$.

Definiţia 4. Mulţimea tuturor punctelor de aderentă ale mulţimii M se numeşte închiderea mulţimii M şi se notează $\overline{M}$.

Este evident că pentru orice mulţime $M \subset X$ avem $M \subset \overline{M}$.

<u>Teorema 2</u>. Punctul $x \in X$ este un punct de aderenţă al mulţimii M (adică $x \in \overline{M}$), dacă şi numai dacă există un şir $\{x_n\}_1^\infty \subset M$, convergent către x.

Demonstraţie. Dacă x este un punct de aderenţă al mulţimii M,atunci

$$S\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap M \neq \emptyset \qquad (n = 1,2, \dots,).$$

Alegem cîte un punct $x_n \in S\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap M \neq \emptyset$ şi obţinem şirul $\{x_n\}_1^\infty \subset M$ cu $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$, adică $x_n \to x$.

Reciproc, fie $x_n \in M$, $x_n \to x$. Din definiţia limitei unui şir de puncte ale spaţiului metric rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ toţi termenii şirului $\{x_n\}_1^\infty \subset M$, cu excepţia unui număr finit de termeni, aparţin sferei $S(x, \varepsilon)$. Prin urmare $S(x, \varepsilon) \cap M \neq 0$ şi deci x este un punct de aderenţă al mulţimii M.

Definiţia 5. Se zice că mulţimea M este închisă dacă $\overline{M} = M$.

Teorema 3. Mulţimea M este închisă dacă şi numai dacă pentru orice şir $\{x_n\}_1^\infty \subset M$, $x_n \to x$ implică $x \in M$.

Demonstraţie. Fie M o mulţime închisă şi $\{x_n\}_1^\infty \subset M$, $x_n \to x$. Conform teoremei 2, punctul x este un punct de aderenţă al mulţimii M, adică $x \in \overline{M}$.Însă $\overline{M} = M$ şi deci $x \in M$.

Reciproc, fie că M posedă proprietatea: $\{x_n\}_1^\infty \subset M$, $x_n \to x$ implică $x \in M$. Aceasta înseamnă că M conţine toate punctele de aderenţă şi deci $\overline{M} \subset M$.

Deoarece incluziunea $M \subset \overline{M}$ este evidentă, rezultă că $M = \overline{M}$, adică M este mulţime închisă.

Consecinţă. Orice sferă închisă

$$\bar{S}(a, r) = \{x \in X: \rho(x, a) \leq r\}$$

este o mulţime închisă în spaţiul metric X.

Într-adevăr, fie $x_n \in \bar{S}(a, r)$, $x_n \to x$. Utilizînd continuitatea distanţei obţinem

$$\rho(x, a) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, a) \leq r$$

şi deci $x \in \bar{S}(a, r)$.

Teorema 4. În orice spaţiu metric X complementara oricărei mulţimi deschise (închise) este o mulţime închisă (deschisă).

Demonstraţie. Fie mulţimea G deschisă, $x_n \in F = X \mid G, x_n \to x$. Admitem că $x \notin F$. Atunci $x \in X \mid F = G$ şi deci există o sferă $S(x, \varepsilon) \subset G$. Însă $x_n \to x$ şi deci $x_n \in S(x, \varepsilon)$ $(n \geq n_0)$. Prin urmare $x_n \in G$ $(n \geq n_0)$, ceea ce este imposibil. Rezultă că $x \in F$. Conform teoremei 3 mulţimea F este închisă.

Fie acum F o mulţime închisă. Să demonstrăm că $G = X \setminus F$ este deschisă. Admitem contrariul. Atunci nu orice punct al mulţimii G este interior şi deci există $a \in G$, astfel încît orice vecinătate $S(a, \varepsilon)$ nu se include în G. Prin urmare, $S(a, \varepsilon) \cap F \neq 0$ $(\forall \varepsilon > 0)$, ceea ce arată că $a \in \bar{F}$. Însă $\bar{F} = F$ şi deci $a \in F$, adică punctul a aparţine atît mulţimii G cît şi complementarei F a acestei mulţimi. Contradicţie. Deci mulţimea G este deschisă.

Utilizînd principiul de dualitate şi teoremele 1, 4 obţinem

Teorema 5. Intersecţia oricărei familii de mulţimi închise este o mulţime închisă. Reuniunea unui număr finit de mulţimi închise este o mulţime închisă.

Demonstraţie. Fie $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un sistem de mulţimi închise şi $F = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$. Avem

$$X \setminus F = X \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in A} (X \setminus F_\alpha)$$

Mulţimile $X \setminus F_\alpha$ sunt deschise şi deci $X \setminus F$ este deschisă. Însă atunci mulţimea $F = X \setminus (X \setminus F)$ este închisă.

În mod analog, dacă F_j $(j = 1, 2, ..., m)$ sunt mulţimi închise şi

$$F = \bigcup_{j=1}^{m} F_j,$$

atunci

$$F = X \setminus \left(\bigcap_{j=1}^{m} (X \setminus F_j) \right).$$

De aici imediat rezulta partea a doua a teoremei.

În continuare menţionăm cîteva proprietăţi ale operaţiei de închidere.

Teorema 6. Pentru orice mulţimi din spaţiul metric *X* avem

a) $M_1 \subset M_2 \Longrightarrow \overline{M_1} \subset \overline{M_2}$;
b) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M_1} \subset \overline{M_2}$;
c) $\overline{M_1 \cap M_2} \subset \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$;
d) $\overline{(\overline{M})} = M$.

Demonstraţie. Proprietăţile a) - c) se verifică fără dificultate. Vom demonstra proprietatea d). Incluziunea $\overline{M} \subset \overline{(\overline{M})}$ este evidentă. Să demonstrăm incluziunea inversă. Fie $a \in \overline{(\overline{M})}$. Avem

$$S(a,r) \cap \overline{M} \neq \emptyset$$

oricare ar fi $r > 0$. Fie $x_0 \in S(a,r) \cap \overline{M}$. Sfera $S(a,r)$, fiind o mulţime deschisă, există $S(x_0,r_1) \subset S(a,r)$. Însă $x_0 \in \overline{M}$ şi deci $S(x_0,r_1) \cap M \neq \emptyset$. De aici şi din incluziunea $S(x_0,r_1) \subset S(a,r)$ rezultă că $S(a,r) \cap M \neq \emptyset$. Numărul $r > 0$ este arbitrar şi deci $a \in \overline{M}$. Prin urmare $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$.

Consecinţă. Închiderea oricărei mulţimi este o mulţime închisă.

§ 6. Spaţii metrice separabile

Definiţia 1. Fie M_1 şi M_2 două mulţimi din spaţiul metric *X*. Mulţimea M_1 se numeşte densă în M_2, dacă $\overline{M_1} \supset M_2$. Mulţimea $M \subset X$ se numeşte densă în spaţiul *X* sau peste tot densă, dacă $\overline{M} = X$.

Este evident că mulţimea *M* este peste tot densă, dacă pentru orice $x \in X$ avem

$S(x, \varepsilon) \cap M \neq \emptyset$ oricare ar fi $\varepsilon > 0$, adică pentru orice $x \in X$ şi orice $\varepsilon > 0$ există $y \in M$, astfel încît $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Definiţia 2. Se zice că spaţiul metric *X* este separabil, dacă în acest spaţiu există o mulţime finită sau numărabilă $M=\{x\}$ şi peste tot densă.

Chiar din definiţie rezultă, că dacă spaţiul metric *X* este format dintr-un număr finit sau numărabil de puncte, atunci el este separabil. În particular, spaţiul metric Q este separabil. Dăm exemple de spaţii metrice separabile şi spaţii metrice neseparabile.

a) Spaţiul metric *R* este separabil. În acest spaţiu mulţimea Q este peste tot densă şi numărabilă.

b) Spaţiul metric R^m este separabil. Peste tot densă în R^m este mulţimea $M=\left\{z=(\zeta_j)_1^m, \zeta_j \in Q\right\}$.

Întradevăr, fie $x=\left(\xi_j\right)_1^m \in R^m$, ε > 0. Alegem $\zeta_j^{(0)} \in Q$ (j = 1, 2, 3, …, m) astfel încît

$$\left|\xi_j-\zeta_j^{(0)}\right|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \quad (j = 1,2,3,\ldots,m).$$

Punctul $z_0=\left(\zeta_j^{(0)}\right)_1^m \in M$ şi

$$\rho(x,z_0)=\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\xi_j-\zeta_j^{(0)}\right)^2\right)^{1/2}<\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\varepsilon^2}{m}\right)^{1/2}=\varepsilon .$$

Mulţimea *M* este numărabilă şi deci R^m este un spaţiu separabil.

c) Se vede uşor că în spaţiul C^m peste tot densă este mulţimea

$$M=\left\{z=(\zeta_j)_1^m, \qquad \zeta_j=u_j+iv_j\ ,u_j,v_j,\in Q\right\}.$$

Această mulţime este numărabilă şi deci C^m este spaţiu separabil.

d) Spaţiul l_p ($1 < p < \infty$) este separabil. Pentru simplitate vom considera spaţiul l_p real. Să notăm prin M_n mulţimea:

$$M_n = \{z = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots,\zeta_n, 0, 0, \ldots), \zeta_i \in Q\}.$$

Această mulţime este numărabilă şi deci numărabilă este şi mulţimea

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

a tuturor şirurilor de rang finit de numere raţionale. Să arătăm că M este peste tot densă.

Fie $x = (\xi_j)_1^{\infty} \in l_p$, $\varepsilon > 0$. Alegea $n_0 \in N$ astfel ca:

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\xi_k|^p \leq \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Avînd numărul n_0 alegem numerele raţionale $\left(\zeta_k^{(0)}\right)_1^{n_0}$ cu proprietatea

$$\left|\xi_k - \zeta_k^{(0)}\right| < \frac{\varepsilon}{(2n_0)^{\frac{1}{p}}}.$$

Fie $z_0 = \left(\zeta_1^{(0)}, \dots, \zeta_{n_0}^{(0)}, 0, 0, \dots\right)$. Este clar că $z_0 \in M$ şi

$$\rho(x, z_0) = \left(\sum_{k=1}^{n_0} |\xi_k - \zeta_k^{(0)}|^p + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} < \left(\sum_{k=1}^{n_0} \frac{\varepsilon^p}{2n_0} + \frac{\varepsilon^p}{2}\right)^{1/p} = \varepsilon\,.$$

Prin urmare, pentru orice $x \in l_p$ şi orice $\varepsilon > 0$, există $z_0 \in M$, astfel încît $\rho(x, z_0) < < \varepsilon$ şi deci mulţimea M este densă în l_p. Mulţimea M, fiind şi numărabilă, rezultă că spaţiul l_p este separabil.

În spaţiul l_p complex peste tot densă este mulţimea şirurilor de rang finit de numere complexe, partea reală şi partea imaginară a cărora sînt numere raţionale. Această mulţime fiind numărabilă, rezultă ca şi spatiul l_p complex este separabil.

Acelaşi raţionament ne permite să demonstrăm că spaţiul c_0 este separabil.

e) Spaţiul $C[a, b]$ este separabil. Vom demonstra că în $C[a, b]$ peste tot densă şi numărabilă este mulţimea M a tuturor polinoamelor cu coeficienţi raţionali. Notăm

prin M_n mulţimea polinoamelor de gradul n cu coeficienţi raţionali. Dacă z∈ M_n, atunci $z(t) = r_0 + r_1 t + \cdots + r_n t^n$ (r_j∈Q). Relaţia φ: z → (r_0, r_1, …, r_n) este o bijecţie a mulţimii M_n pe mulţimea sistemelor de n + 1 numere raţionale şi deoarece ultima mulţime este numărabilă, numărabilă va fi şi mulţimea M_n . Însă $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ şi deci M este numărabilă.

Fie $x \in C[a, b]$, ε > 0. Conform teoremei Weierstrass, există un polinom

$$y(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n_0} t^{n_0} \quad (a_j \in R),$$

astfel încît

$$\rho(x, y) = \max_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie

$$\alpha = \max_{0 \le k \le n_0} \max_{a \le t \le b} |t|^k.$$

Avînd numerele n_0 şi α , alegem numerele rationale r_j asfel ca

$$|a_j - r_j| < \frac{\varepsilon}{2\alpha(n_0 + 1)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n_0).$$

Punem

$$z(t) = r_0 + r_1 t + \cdots + r_{n_0} t^{n_0}$$

Avem

$$|y(t) - z(t)| = |\sum_{j=0}^{n_0} a_j t^j - \sum_{j=0}^{n_0} r_j t^j| \le \sum_{j=0}^{n_0} |a_j - r_j| \cdot |t|^j$$

$$< \sum_{j=0}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2\alpha(n_0 + 1)} \cdot \alpha = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deci

$$\rho(y,z) = \max_{a \le t \le b} |y(t) - z(t)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

şi prin urmare

$$\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aici rezultă, că mulţimea M este densă în $C[a, b]$. Mulţimea M , fiind şi numărabilă, spaţiul $C[a, b]$ este separabil.

f) Spaţiul $C_p[a, b]$ este separabil. În acest spaţiu peste tot densă este mulţimea M a polinoamelor cu coeficienţi raţionali. Aceasta rezultă imediat din e). Într-adevăr, fie $x \in C_p[a, b]$ $\varepsilon > 0$. Din p. e) rezultă existenţa polinomului $z \in M$ astfel încît

$$\rho_C(x,z) < \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{p}}}.$$

Avem

$$\rho_{Cp}(x,z) = \left(\int_a^b |x(t) - z(t)|^p dt \right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |\rho_C(x,z)|^p dt \right)^{1/p} < \frac{\varepsilon}{(b-a)^{\frac{1}{p}}} \cdot (b-a)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \varepsilon$$

Mulţimea M , fiind numărabilă, spaţiul $C_p[a, b]$ este separabil.

g) Spaţiul l_∞ nu este separabil. Să demonstrăm că orice mulţime numărabilă în l_∞ nu este peste tot densă. Ne vom limita la cazul spaţiului real. Fie deci

$$x_n = \left(\xi_j^{(n)}\right)_1^\infty \in l\infty \qquad (n = 1,2,\dots).$$

Definim $\tilde{x} = \left(\xi_j\right)_1^\infty \in l\infty$ în modul următor:

$$\xi_j = \begin{cases} 1, & \xi_j^{(j)} < 0 \\ -1, & \xi_j^{(j)} \ge 0 \end{cases}.$$

Avem $\rho(x_n, \tilde{x}) = \sup_j \left|\xi_j^{(n)} - \xi_j\right| \geq |\xi_n^{(n)} - \xi_n| \geq 1 \quad (n = 1,2, \dots)$.

De aici imediat rezultă că $\tilde{x} \notin \overline{M = \{x_j\}_1^\infty}$ şi deci mulţimea $M = \{x_j\}_1^\infty$ nu este densă în l_∞ . Prin urmare, în spaţiul l_∞ nu există mulţimi numărabile şi peste tot dense, adică l_∞ este un spaţiu metric neseparabil.

<u>Teorema 1</u>. Orice subspaţiu *Y* al unui spaţiu metric separabil *X* este de asemenea separabil.

Demonstraţie. Fie mulţimea $M = \{x_k\}_1^\infty$ densă în *X*, $(\varepsilon_n)_1^\infty$ – un şir de numere pozitive, convergent către zero. Ca de obicei, prin $\rho(x, Y)$ vom nota distanţa de la punctul *x* pînă la mulţimea *Y* în spaţiul *X*, adică

$$\rho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x, y).$$

În particular

$$\rho(x_k, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x_k, y).$$

Conform definiţiei marginii inferioare , pentru orice $\varepsilon_n > 0$ există $y_{kn} \in Y$ astfel încît

$$\rho(x_k, y_{kn}) < \rho(x_k, Y) + \varepsilon_n \quad (n = 1,2, \dots; \ k \in N) \qquad (1)$$

Să arătăm că mulţimea $M_1 \subset Y$, $M_1 = (y_{kn})_{k,n=1}^\infty$ este densă în *Y*. Fie $y \in Y$, $\varepsilon > 0$. Deoarece *M* este densă în *X*, rezultă că există x_{k_0} astfel încît $\rho(y, x_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{3}$, iar din

$$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0,$$

că există $n_0 \in N$ cu proprietatea $\varepsilon_{n_0} < \frac{\varepsilon}{3}$. Din inegalitatea triunghiului şi (1) avem

$$\rho(y, y_{k_0 n_0}) \leq \rho(y, x_{k_0}) + \rho(x_{k_0}, y_{k_0 n_0}) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \rho(x_{k_0}, Y) + \varepsilon_{n_0} < \frac{2}{3}\varepsilon + \rho(x_{k_0}, Y).$$

Însă e clar că distanţa de la x_{k_0} la mulţimea Y nu întrece distanţa de la x_{k_0} la un punct arbitrar al acestei mulţimi şi deci

$$\rho(x_{k_0}, Y) \leq \rho(x_{k_0}, y) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

De aici şi din (2) avem

$$\rho(y, y_{k_0 n_0}) < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ne-am convins că M_1 este densă în X şi, deoarece M_1 este numărabilă, rezultă că Y este spaţiu metric separabil.

Deosebit de utilă în problema stabilirii neseparabilităţii unor spaţii metrice este teorema 2.

Teorema 2. Fie X un spaţiu metric. Dacă există o mulţime nenumărabilă $\Gamma \subset X$ şi un număr $\delta > 0$, astfel încît pentru $x_\alpha, x_\beta \in \Gamma$, $x_\alpha \neq x_\beta$ avem $\rho(x_\alpha, x_\beta) \geq \delta$, atunci spaţiul metric X este neseparabil.

Demonstraţie. Admitem contrariul, adică X este separabil şi $M = \{z_k\}_1^\infty$ o mulţime peste tot densă. Considerăm numărul $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$. Pentru orice $x \in X$ există z_{j_0} cu $\rho(x, z_{j_0}) < \varepsilon$, adică

$$x \in S\left(z_{j_0}, \frac{\delta}{3}\right) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S\left(z_j, \frac{\delta}{3}\right).$$

Prin urmare

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} S\left(z_j, \frac{\delta}{3}\right).$$

Mulţimea Γ, fiind nenumărabilă, iar mulţimea sferelor cel mult numărabilă, există o sferă $S\left(z_k, \frac{\delta}{3}\right)$ care conţine nu mai puţin de două puncte ale mulţimii Γ.

Fie

$x_\alpha, x_\beta \in S\left(z_k, \frac{\delta}{3}\right) \cap \Gamma, x_\alpha \neq x_\beta$.

În acest caz avem:

$$\delta \leq \rho(x_\alpha, x_\beta) \leq \rho(x_\alpha, z_k) + \rho(z_k, x_\beta) < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \frac{2\delta}{3}.$$

Am obţinut o contradicţie , de unde şi rezultă afirmaţia teoremei.

Utilizînd această teoremă, obţinem încă o demonstraţie a neseparabilităţii spaţiului l_∞. E suficient să observăm că mulţimea Γ a tuturor şirurilor $(\xi_j)_1^\infty$ cu $\xi_j = 0$ sau $\xi_j = 1$ este nenumarabilă şi dacă $x_\alpha, x_\beta \in \Gamma, x_\alpha \neq x_\beta$, atunci $\rho(x_\alpha, x_\beta) = 1$.

§ 7. Şiruri fundamentale

Definiţie: Se spune că şirul $\{x_n\}_1^\infty$ de puncte din spaţiul metric X este şir fundamental (sau şir Cauchy), dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$, astfel încît $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ oricare ar fi $n, m > n_0$.

Să demonstrăm cîteva proprietăţi simple ale şirurilor fundamentale.

Teorema 1. Orice şir fundamental este mărginit.

Demonstraţie. Fie $\{x_n\}_1^\infty$ - un şir fundamental. Pentru $\varepsilon = 1$ există $n_0 \in N$ astfel încît $\rho(x_n, x_m) < 1$ $(n, m \geq n_0)$. În particular , $\rho(x_n, x_{n_0}) < 1$ $(n \geq n_0)$. Dacă

$$r = \max_{1 \leq n < n_0} \rho(x_n, x_{n_0})$$

atunci $\rho(x_n, x_{n_0}) < r + 1 \quad (n = 1,2, \dots)$ şi deci $\{x_n\}_1^\infty \subset S(x_{n_0}, r + 1)$.

Teorema 2. Fie $\{x_n\}_1^\infty$ un şir fundamental şi $\delta_k > 0$ $(k = 1, 2, \dots)$. Există un subşir $\{x_{n_k}\}_1^\infty$ astfel încît $\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \delta_k$ $(k = 1,2, \dots)$.

Demonstraţie. Şirul $(x_n)_1^\infty$ fiind fundamental, există $n_1 \in N$, astfel încît $n, m \geq n_1$ implică $\rho(x_n, x_m) < \delta_1$ şi, în particular, $\rho(x_n, x_{n_1}) < \delta_1$ ($n \geq n_1$). În mod analog există $n_2 > n_1$, astfel încît $n, m \geq n_2$ implică $\rho(x_n, x_m) < \delta_2$ şi, în particular, $\rho(x_n, x_{n_2}) < \delta_2$. ($n \geq n_2$). Prelungind acest procedeu, vom obţine şirul $(n_k)_1^\infty$ de numere naturale cu proprietăţile: $n_{k+1} > n_k$, $\rho(x_n, x_{n_k}) < \delta_k$ pentru orice $n \geq n_k$ ($k = 1, 2, \ldots$). În particular, dacă în ultima inegalitate punem $n = n_{k+1}$, obţinem:

$$\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \delta_k$$

Consecinţă. Orice şir fundamental $\{x_n\}_1^\infty$ conţine un subşir $\{x_{n_k}\}_1^\infty$, astfel încît seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k})$$

este convergentă.

Este suficient să punem in teoremă $\delta_k = k^{-2}$.

<u>Teorema 3</u>. Dacă şirul fundamental $\{x_n\}_1^\infty$ conţine un subşir convergent $\{x_{n_j}\}_1^\infty$ şi $x_{n_j} \to a$, atunci şirul $\{x_n\}_1^\infty$ este convergent şi $x_n \to a$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Există $n_0 \in N$ astfel încît $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ ($n, m \geq n_0$). Deoarece $x_{n_j} \to a$, există $j_0 \in N$ astfel încît pentru orice $j \geq j_0$ sînt adevărate inegalităţile

$$n_j \geq n_0, \;\; \rho\left(x_{n_j}, a\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie acum $n \geq n_0$. Avem

$$\rho(x_n, a) \leq \rho\left(x_n, x_{n_j}\right) + \rho\left(x_{n_j}, a\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare şirul $\{x_n\}_1^\infty$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Teorema 4. Orice şir convergent este fundamental.

Demonstraţie. Fie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

şi ε > 0. Alegem $n_0 \in N$ astfel ca pentru orice $n \geq n_0$ să avem $\rho(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Dacă $n, m \geq n_0$, atunci

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, a) + \rho(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

§ 8. Spații metrice complete

În paragraful precedent ne-am convins că într- un spaţiu metric orice şir convergent este fundamental. Afirmaţia reciprocă în caz general nu este adevărată. În legătură cu aceasta introducem următoarea definiție.

Definiţie. Spaţiul metric *X* se numeşte complet, dacă în acest spaţiu orice şir fundamental este convergent.

1. Spaţiul metric *R* este complet. Aceasta rezultă din criteriul general Cauchy de convergenţă al şirurilor de numere reale.
2. Spaţiul metric *Q* nu este complet.

Să arătăm că şirul $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_1^\infty$ este fundamental în *Q*, însă nu este convergent în acest spaţiu. Şirul dat este convergent în *R* şi

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Orice şir convergent este şi fundamental şi deci $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}_1^{\infty}$ este fundamental în *R*. Spaţiul *Q* este un subspaţiu al spaţiului *R*, şirul $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}_1^{\infty} \subset Q$ şi deci $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}_1^{\infty}$ este fundamental în *Q*. Admitem că acest şir este convergent în *Q*. Există atunci $a \in Q$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a$$

în spaţiul *Q* şi deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = a$$

în *R*. Din proprietatea de unicitate a limitei unui şir convergent obţinem $e = a \in Q$. În cursul de analiză matematică însă se demonstrează că numărul $e \notin Q$. Contradicţia obţinută arată că şirul dat nu este convergent în *Q*.

Prin urmare şirul $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}_1^{\infty}$,fiind fundamental în *Q* , în acelaşi timp nu este convergent în acest spaţiu şi deci spatiul *Q* nu este complet.

3. Spaţiul metric *C* este complet. Rezultă nemijlocit din criteriul general Cauchy de convergenţă al şirurilor de numere complexe.
4. Spaţiul R^m este complet. Fie $\{x_n\}_1^{\infty}$ — un şir fundamental în R^m,
5. $x_n = \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_m^{(n)}\right)$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in N$, astfel încît $\rho(x_n, x_k) < \varepsilon$ $(n, k \geq n_0)$ şi deci

$$\left|\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(k)}\right| \leq \left(\sum_{r=1}^{m}\left(\xi_r^{(n)} - \xi_r^{(k)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \rho(x_n, x_k) < \varepsilon \quad (n, k \geq n_0; \quad j = 1, 2, \dots, m).$$

De aici rezultă că şirurile numerice $\left\{\xi_j^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ sînt fundamentale şi deci convergente. Fie

$$\lim_{n\to\infty} \xi_j^{(n)} = \xi_j.$$

Deoarece convergența în spaţiul R^m este echivalentă cu convergenţa în coordonate, rezultă că

$$x_n \to x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in R^m.$$

În mod analog se demonstrează completitudinea spaţiilor C^m, $l_p^{(m)}$, $l_\infty^{(m)}$.

6. Spaţiul l_p $(1 \le p < \infty)$ este complet. Fie $\{x_n\}_1^\infty$ − un şir fundamental în l_p, $x_n = \left(\xi_j^{(n)}\right)_1^\infty$ și $\varepsilon > 0$. Există $n_0 \in N$, astfel încît $\rho(x_n, x_k) < \varepsilon$ $(n, k \ge n_0)$. Însă

$$\left|\xi_m^{(n)} - \xi_m^{(k)}\right| \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(k)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \rho(x_n, x_k) < \varepsilon$$

$$(m = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

şi deci şirul numeric $\left\{\xi_m^{(n)}\right\}_{n=1}^\infty$ este fundamental. Prin urmare şirul $\left\{\xi_m^{(n)}\right\}_{n=1}^\infty$ este convergent. Fie

$$\lim_{n\to\infty} \xi_m^{(n)} = \xi_m \qquad (m = 1, 2, \dots).$$

Din inegalitatea (1) avem

$$\left(\sum_{j=1}^{M} \left|\xi_j^{(n)} - \xi_j^{(k)}\right|^p\right)^{1/p} < \varepsilon \qquad (n, k \ge n_0)$$

pentru orice număr natural M.

Trecînd în ultima inegalitate la limita cu $k \to \infty$, obținem

$$\left(\sum_{j=1}^{M} \left|\xi_j^{(n)} - \xi_j\right|^p\right)^{1/p} \le \varepsilon \qquad (n \ge n_0).$$

De aici

$$\lim_{M\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{M}\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j\right|^p\right)^{1/p} \le \varepsilon \quad (n \ge n_0),$$

adică

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j^{(n)}-\xi_j\right|^p\right)^{1/p} \le \varepsilon \qquad (n \ge n_0) \qquad (2)$$

Notăm $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$. Din inegalitatea Minkowski avem

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(\xi_j-\xi_j^{(n_0)}\right)+\xi_j^{(n_0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j-\xi_j^{(n_0)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j^{(n_0)}\right|^p\right)^{1/p} < \varepsilon + \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\xi_j^{(n_0)}\right|^p\right)^{1/p} < \infty$$

şi deci $x \in l_p$. Inegalitatea (2) afirmă, că $\rho(x_n, x) \le \varepsilon$ $(n \ge n_0)$. Deoarece $\varepsilon > 0$ este arbitrar, urmează că şirul $\{x_n\}_1^\infty$ converge în spaţiul l_p şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Prin urmare spaţiul l_p este complet.

7. Spaţiul $C[a, b]$ este complet. Fie $\{x_n\}_1^\infty$ − un şir fundamental . Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$, astfel încît $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ $(n, m \ge n_0)$. Avem

$$|x_n(t) - x_m(t)| \le \max_{a\le t\le b}|x_n(t) - x_m(t)| = \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \ \ (n, m \ge n_0; t \in [a, b]).$$

Aplicăm criteriul Cauchy de convergenţă uniformă al şirului fundamental de funcţii $\{x_n(t)\}_1^\infty$ şi obţinem că şirul $\{x_n(t)\}_1^\infty$ converge uniform către o funcţie continuă $x(t)$. Întrucît convergenţa în spaţiul $C[a, b]$ coincide cu convergenţa uniformă al şirului respectiv de funcţii, rezultă că şirul $\{x_n\}_1^\infty$ converge în $C[a, b]$ către x. Prin urmare

orice şir fundamental $\{x_n\}_1^\infty$ este convergent în $C[a, b]$ şi deci spaţiul $C[a, b]$ este complet.

8. Spaţiul $C_p[a, b]$ nu este complet.

E suficient să arătăm că în acest spaţiu există un şir fundamental care nu converge. În acest scop considerăm şirul

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4n} \le t \le b \\ -1, & a \le t \le \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{4n} \\ \frac{4n}{b-a}\left(t - \frac{a+b}{2}\right), & \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{4n} < t < \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4n} \end{cases}.$$

Acest şir este fundamental. Într-adevăr,

$$\rho^p(x_n, x_{n+k}) = \int_a^b |x_n(t) - x_{n+k}(t)|^p\, dt = \int_{\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{4n}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{4n}} |x_n(t) - x_{n+k}(t)|^p\, dt \le$$

$$\le \int_{\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{4n}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{4n}} (|x_n(t)| + |x_{n+k}(t)|)^p\, dt \le \int_{\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{4n}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{4n}} (1+1)^p\, dt = 2^p \cdot \frac{b-a}{2n} \qquad (3)$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$ alegem $r \in N$ astfel ca $2\cdot\left(\frac{b-a}{2r}\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Dacă $n \ge r$, atunci din (3) rezultă că $\rho(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon$ oricare ar fi $k \in N$ și deci șirul $\{x_n\}_1^\infty$ este fundamental.

Admitem că șirul $\{x_n\}_1^\infty$ converge către x în spațiul $C_p[a, b]$. Fie $\frac{a+b}{2} < \tau \le b$. Alegem $n_0 \in N$ astfel ca $\frac{a+b}{2} < \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4n} < \tau$ pentru $n \ge n_0$. Atunci, evident, avem $\rho(x_n, x) = \left(\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \ge \left(\int_\tau^b |x_n(t) - x(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\tau^b |1 -\right.$

$$\left. - \ x(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (4)$$

Din convergenţa şirului $\{x_n\}_1^\infty$ către x rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$,iar inegalitatea (4) în acest caz implică

$$\int_{\tau}^{b} |1 - x(t)|^p \, dt = 0 \qquad (5)$$

Funcţia $|1 - x(t)|^p$, fiind continuă şi nenegativă, din egalitatea (5) deducem că $x(t) = 1$ ($\tau \le t \le b$). Punctul τ a fost luat arbitrar pe $\left(\frac{a+b}{2}, b\right]$ și deci $x(t) = 1$ pe acest interval. În mod analog obţinem $x(t) = -1$ pe $\left[a, \frac{a+b}{2}\right)$. Aceasta însă este imposibil, deoarece funcţia $x(t)$ este continuă pe $[a, b]$. Prin urmare, şirul $\{x_n\}_1^\infty$ nu este convergent.

9. Spaţiul metric discret este complet. În acest spaţiu şirul $\{x_n\}_1^\infty$ este fundamental, dacă şi numai dacă există un număr $n_0 \in N$ astfel încît $x_n = x_{n_0}$ pentru orice $n \ge n_0$. De aici imediat rezultă că orice șir fundamental în acest spaţiu este convergent.

§ 9. Completatul unui spaţiu metric

Definiţie: Fie X și Y două spaţii metrice. Se zice că spaţiile X şi Y sînt izometrice, dacă există o aplicaţie bijectivă f de la X la Y care păstrează distanţa, adică $\rho_x(x, x') = \rho_y(f(x), f(x'))$ oricare ar fi $x, x' \in X$. Aplicaţia f în acest caz se numeşte izometrie.

Dacă spaţiile metrice X şi Y sînt izometrice, atunci relaţiile metrice între punctele ambelor spaţii sînt aceleaşi ; diferită poate fi doar natura elementelor spaţiilor X şi Y .

Teorema Hausdorff. Fie X un spaţiu metric, care nu este complet. Există un spaţiu metric complet Y cu proprietăţile:

1. X este izometric cu un subspaţiu $Y_1 \subset Y$;

2. Y_1 este dens în Y.

Demonstraţie. Dacă $\{x_n\}_1^\infty$ şi $\{x'_n\}_1^\infty$ sînt două şiruri fundamentale în X, atunci există

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n).$$

Într-adevăr, utilizînd inegalitatea patrulaterului, obţinem

$$|\rho(x_n, x'_n) - \rho(x_m, x'_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(x'_n, x'_m).$$

Şirurile $\{x_n\}_1^\infty$ şi $\{x'_n\}_1^\infty$ fiind fundamentale, există $n_0 \in N$ astfel încît

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ \rho(x'_n, x'_m) < \frac{\varepsilon}{2} \ \ (n, m \geq n_0),$$

ceea ce la rîndul său implică

$$|\rho(x_n, x'_n) - \rho(x_m, x'_m)| < \varepsilon \ \ (n, m \geq n_0),$$

adică şirul numeric($\rho(x_n, x'_n))_1^\infty$ este fundamental şi deci convergent.

Să considerăm mulţimea $\Phi(X)$ a tuturor şirurilor fundamentale de elemente din X. Vom spune că două şiruri fundamentale $\{x_n\}_1^\infty$ şi $\{x'_n\}_1^\infty$ sînt echivalente şi vom scrie $\{x_n\}_1^\infty \sim \{x'_n\}_1^\infty$ dacă

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = 0.$$

Relaţia $\sim$ într-adevăr este o relaţie de echivalenţă, adică ea posedă proprietăţile:

1. $\{x_n\}_1^\infty \sim \{x_n\}_1^\infty$ (reflexivitate);
2. $\{x_n\}_1^\infty \sim \{x'_n\}_1^\infty$ implică $\{x'_n\}_1^\infty \sim \{x_n\}_1^\infty$ (simetrie);
3. $\{x_n\}_1^\infty \sim \{y_n\}_1^\infty$, $\{y_n\}_1^\infty \sim \{z_n\}_1^\infty$ implică $\{x_n\}_1^\infty \sim \{z_n\}_1^\infty$ (tranzitivitate).

Prin urmare această relaţie împarte mulţimea $\Phi(X)$ în clase de echivalenţă , astfel încît două elemente $\{x_n\}_1^\infty$şi $\{x'_n\}_1^\infty$aparţin aceleaşi clase, dacă şi numai dacă $\{x_n\}_1^\infty \sim \{x'_n\}_1^\infty$. Vom nota prin Y mulţimea tuturor claselor de echivalenţă, iar elementele mulţimii (adică clasele de echivalenţă) $-$ prin $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z},$ etc. Mulţimea Y devine un spaţiu metric, dacă definim distanţa în modul următor:

$$\rho(\hat{x}\ , \hat{y},) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)\ , \qquad (1)$$

unde $\{x_n\}_1^\infty$ este un element arbitrar din $\hat{x},$ iar $\{y_n\}_1^\infty -$ din $\hat{y}$. Partea dreaptă în (1) nu depinde de alegerea reprezentanţilor din $\hat{x}$ şi $\hat{y}$ şi deci definiţia numărului $\rho(\hat{x},, \hat{y}\ )$ este

corectă. Într-adevăr, dacă $\{x'_n\}_1^\infty \in \hat{x},\ \{y'_n\}_1^\infty \in \hat{y}$, atunci $\{x_n\}_1^\infty \sim \{x'_n\}_1^\infty$, $\{y_n\}_1^\infty \sim \{y'_n\}_1^\infty$ şi deci

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \le \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n) \to 0\ ,$$

ceea ce implică

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n).$$

Să ne convingem, că relaţia (1) într-adevăr defineşte o distanţă pe mulţimea Y. Dacă $\hat{x} = \hat{y}$, atunci pentru $\{x_n\}_1^\infty \in \hat{x},\ \{x_n\}_1^\infty \in \hat{y}$ avem

$$\rho(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_n) = 0.$$

Reciproc , fie $\rho(\hat{x},\ \hat{y}) = 0$ şi $\{x_n\}_1^\infty \in \hat{x},\ \{y_n\}_1^\infty \in \hat{y}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$$

şi deci $\{x_n\}_1^\infty \sim \{y_n\}_1^\infty$, ceea ce implică $\hat{x} = \hat{y}$.

Proprietatea 2) a distanţei rezultă din şirul de egalităţi

$$\rho(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, x_n) = \rho(\hat{y}, \hat{x}).$$

În sfîrşit, fie $\{z_n\}_1^\infty \in \hat{z}$. Atunci

$$\rho(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) \le \lim_{n\to\infty} \big(\rho(x_n, z_n) + \rho(z_n, y_n)\big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(z_n, y_n) = \rho(\hat{x}, \hat{z}) + \rho(\hat{z}, \hat{y})$$

Deci mulţimea Y , în adevăr formează un spaţiu metric cu distanţa definită prin relaţia (1).

Să notam cu Y_1 submultimea lui Y , avînd ca elemente clasele care au ca reprezentanţi şirurile constante. Dacă $\hat{x}, \hat{y}$ sînt reprezentate respectiv de şirurile $\{x, x,...\}$ şi $\{y, y,...\}$, atunci

$$\rho(\hat{x},\hat{y}\,) = \lim_{n\to\infty}\rho(x,y) = \rho(x,y). \qquad (2)$$

Aplicaţia f: $X \to Y_1$ definită prin formula $f(x) = \hat{x}$ este, în virtutea egalităţii (2), o izometrie a spaţiilor X şi Y_1.

Să arătăm acum că mulţimea Y_1 este densă în Y. Fie $\hat{x} \in Y$, $\varepsilon > 0$ şi $\{x_n\}_1^\infty \in \hat{x}$. Prin $\hat{x}_n$ aici vom nota clasa reprezentată de şirul constant $(x_n, x_n, \ldots)$. Şirul $\{x_n\}_1^\infty$ fiind fundamental, există $n_0 \in N$, astfel încît $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ $(m, n \geq n_0)$.

De aici obţinem

$$\rho(\hat{x},\hat{x}_n\,) = \lim_{m\to\infty}\rho(x_m,x_n) \leq \varepsilon \quad (\, n > n_0),$$

adică

$$\lim_{n\to\infty}\hat{x}_n = \hat{x}.$$

Însă $\hat{x}_n \in Y_1$ şi deci $\bar{Y}_1 = Y$.

În sfirşit vom demonstra că spaţiul metric Y este complet. Fie $\{\hat{y}_n\}_1^\infty$ un şir fundamental în Y. Subspaţiul Y_1 fiind dens în Y, există $\hat{x}_n \in Y_1$ astfel încît $\rho(\hat{x}_n, \hat{y}_n) < \frac{1}{n}$ $\quad (n = 1,2,\ldots)$.

Fie $(x_n, x_n, \ldots) \in \hat{x}_n$ şi deci $f(x_n) = \hat{x}_n$. Avem

$$\rho(x_n,x_m) = \rho(\hat{x}_n,\hat{x}_m) \leq \rho(\hat{x}_n,\hat{y}_n) + \rho(\hat{y}_n,\hat{y}_m) + \rho(\hat{y}_m,\hat{x}_m) <$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \rho(\hat{y}_n,\hat{y}_m) \qquad (3)$$

De aici, avînd în vedere că şirul $\{\hat{y}_n\}_1^\infty$ este fundamental, obţinem : pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in N$, astfel încît $\rho(\hat{y}_n,\hat{y}_m) < \frac{\varepsilon}{4}$, oricare ar fi $n, m > n_0$. Este clar că numărul n_0 poate fi luat astfel ca $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{4}$. Din (3) avem

$$\rho(x_n,x_m) < \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon \qquad (n,m > n_0)\ , \qquad (4)$$

adică şirul $\{x_n\}_1^\infty$ este fundamental. Acest şir defineşte un element $\hat{x} \in Y$.

Dacă $n > n_0$, atunci utilizînd (4), obţinem

$$\rho(\hat{x}, \hat{y}_n) \leq \rho(\hat{x}, \hat{x}_n) + \rho(\hat{x}_n, \hat{y}_n) < \lim_{m\to\infty} \rho(x_m, x_n) + \frac{1}{n} < \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Deci şirul $\{\hat{y}_n\}_1^\infty$ este convergent. Prin urmare spaţiul metric Y este complet.

Spaţiul metric Y cu proprietăţile a) şi b) din teoremă se numeşte completatul spaţiului metric X. Se poate demonstra că dacă Z este un alt spaţiu metric complet ce conţine un subspaţiu Z_1 dens în Z şi care este izometric cu X, atunci Z este izometric cu Y. Cu alte cuvinte, completatul unui spaţiu metric se determină cu precizie de izometrie.

§ 10. Teorema Cantor despre un şir descrescător de mulţimi închise

Definiţie. Fie M - o mulţime nevidă şi mărginită în spaţiul metric X. Se numeşte diametrul mulţimii M numărul

$$diam\, M = \sup_{x,y \in M} \rho(x, y).$$

Se vede uşor că diametrul sferei $\bar{S}(x_0, r)$ este mai mic sau egal cu $2r$. Într-adevăr, dacă $x, y \in \bar{S}(x_0, r)$ atunci

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) \leq r + r = 2r.$$

De aici avem

$$diam\, \bar{S}(x_0, r) \leq 2r.$$

Observaţie. Diametrul sferei de rază $r > 0$ poate fi strict mai mic ca $2r$. Fie,de exemplu, X spaţiul metric discret ce conţine cel puţin două puncte. Dacă $x \in X$, atunci $diam\, \bar{S}(x, 1) = 1$ în timp ce $2r = 2$. Avem deci $diam\, \bar{S}(x, 1) < 2$.

Teorema 1. (Cantor). Fie X un spaţiu metric complet şi $\{F_n\}_1^\infty$ şir descrescător (adică $F_1 \supset F_2 \supset ... \supset F_n \supset \ldots$) de mulţimi închise şi nevide. Dacă

$$\lim_{n\to\infty} diam\, F_n = 0,$$

atunci există un punct care aparţine tuturor mulţimilor F_n şi un astfel de punct este unic.

Demonstraţie. Pentru orice $n \in N$ fie $x_n \in F_n$. Dacă $m > n$ atunci $F_m \subset F_n$ şi deci x_m, $x_n \in F_n$. Rezultă că $\rho(x_m, x_n) < diam\, F_n \to 0$ şi, prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in N$ astfel încît $\rho(x_m, x_n) < diam\, F_n < \varepsilon$ $(m > n \geq n_0)$, adică şirul $\{x_n\}_1^\infty$ este fundamental. Spaţiul X fiind complet, rezultă că există

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Deoarece $\{x_n\}_{n=m}^\infty \subset F_m$ şi $x_m, x_{m+1},... \to x_0$, iar F_m este o mulţime închisă, avem $x_0 \in F_m$. Numărul $m \in N$ a fost luat arbitrar şi deci $x_0 \in F_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Să demonstrăm acum unicitatea punctului comun tuturor mulţimilor F_m. Fie x_0, $y_0 \in F_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Avem

$$0 \leq \rho(x_0, y_0) \leq diam\, F_m \to 0.$$

De aici $\rho(x_0, y_0) = 0$ şi deci $x_0 = y_0$.

Din teorema 1 rezultă

Teorema 2. Fie X un spaţiu metric complet şi $\bar{S}(z_n, r_n)$ un şir descrescător de sfere închise. Dacă $r_n \to 0$, atunci există un punct comun tuturor sferelor $\bar{S}(z_n, r_n)$ şi un asfel de punct este unic.

E suficient să observăm că $diam\, \bar{S}(z_n, r_n) \leq 2r_n \to 0$ şi că sfera $\bar{S}(z_n, r_n)$ este o mulţime închisă.

Este adevărată şi afirmaţia reciprocă acestei teoreme.

Teorema 3. Dacă în spaţiul metric X pentru orice şir descrescător de sfere închise, razele cărora tind la zero, există un punct ce aparţine tuturor acestor sfere, atunci X este complet.

Demonstraţie. Fie $\{x_n\}_1^\infty$ un şir fundamental în *X*. Conform teoremei 2 §6, din şirul dat putem extrage un subşir $\{x_{n_k}\}_1^\infty$ astfel ca $\rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq 2^{-k-1}$ (*k* = 1, 2, ...). De aici urmează că $\bar{S}(x_{n_{k+1}}, 2^{-k-1}) \subset \bar{S}(x_{n_k}, 2^{-k})$. Într-adevăr, dacă $x \in \bar{S}(x_{n_{k+1}}, 2^{-k-1})$, atunci $\rho(x, x_{n_{k+1}}) \leq 2^{-k-1}$ şi deci $\rho(x, x_{n_k}) \leq \rho(x, x_{n_{k+1}}) + \rho(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq 2^{-k-1} + 2^{-k-1} = 2^{-k}$, adică $x \in \bar{S}(x_{n_k}, 2^{-k})$. Prin ipoteză, există un punct x_0, astfel încît $x_0 \in \bar{S}(x_{n_k}, 2^{-k})$ (*k* = 1, 2, …). Deci $\rho(x_{n_k}, x_0) \leq 2^{-k} \to 0$ şi prin urmare subşirul $\{x_{n_k}\}_1^\infty$ este convergent. Conform teoremei 3 §6, convergent este şi şirul $\{x_n\}_1^\infty$. Aşadar *X* este spaţiu metric complet.

Observaţie. Condiţiile teoremei 2 sunt esenţiale. Exemplele respective se construiesc fără dificultate. Vom prezenta aici doar un exemplu. Fie *X* = *R* cu metrica

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ \dfrac{1}{|x|+1} + \dfrac{1}{|y|+1} + 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Spaţiul *X* este complet. Considerăm sferele închise

$$\bar{S}\left(n, 1 + \frac{2}{n+1}\right) = \left\{x \in R : \rho(x,n) \leq 1 + \frac{2}{n+1}\right\}$$
$$= \left\{x \in R : \frac{1}{|x|+1} + \frac{1}{n+1} + 1 \leq 1 + \frac{2}{n+1}\right\} =$$
$$= \{x \in R : |x| \geq n\}.$$

Ele formează un şir descrescător. Evident, nu există un punct comun tuturor acestor sfere. În acest exemplu $r_n = 1 + \frac{2}{n+1}$ nu tinde la 0.

§ 11. Mulţimi rare. Teorema Baire

Definiţia 1. Mulţimea M din spaţiul metric X se numeşte rară dacă orice sferă $S(a, r) \subset X$ conţine o sferă $S(b, \tilde{r})$ în care nu există nici un punct din M, adică $S(b, \tilde{r}) \cap M = \varnothing$.

Exemplul 1. În spaţiul metric R submulţimile N, Z sînt rare, iar Q nu este rară. Nu este rară în acest spaţiu nici mulţimea $N \cup [0, 1]$.

Definiţia 2. Spaţiul metric X se numeşte spaţiu de prima categorie Baire, dacă el poate fi reprezentat ca reuniunea unei familii numărările de mulţimi rare. În caz contrar X se numeşte spaţiu de categoria a doua Baire.

Exemplul 2. Spaţiul Q este de primă categorie Baire. Într-adevăr, Q este o mulţime numărabilă şi deci $Q = \{r_n\}_1^\infty$. Rezultă că

$$Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

unde $X_n = \{r_n\}$ şi X_n , evident, este mulţime rară.

Observăm că spaţiul Q nu este complet. Pentru spațiile complete este adevărată:

Teorema Baire. Orice spaţiu metric complet aste de categoria a doua Baire.

Demonstraţie. Fie X un spaţiu metric complet. Admitem contrariul, adică

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n,$$

unde fiecare mulţime X_n este rară.

Fie $S(a, 1)$ o sferă oarecare în X. Deoarece X_1 este mulţime rară, există o sferă $S(x_1, r_1) \subset S(a, 1)$, astfel încît $S(x_1, r_1) \cap X_1 = \emptyset$. Putem evident admite (în caz de necesitate micşorăm raza sferei $S(x_1, r_1)$), că $\bar{S}(x_1, r_1) \subset S(a, 1)$, $r_1 < \frac{1}{2}$ şi $\bar{S}(x_1, r_1) \cap X_1 = \emptyset$. Deoarece X_2 este o mulţime rară, există o sferă $S(x_2, r_2)$) astfel încît $\bar{S}(x_2, r_2) \subset \bar{S}(x_1, r_1)$, $r_2 < \frac{1}{2} r_1$ şi $\bar{S}(x_2, r_2) \cap X_2 = \emptyset$. Prin inducţie, obţinem un şir descrescător $\{\bar{S}(x_n, r_n)\}$ de sfere închise cu proprietăţile:

$\bar{S}(x_n, r_n) \cap X_n = \emptyset$, $r_n < \frac{1}{2} r_{n-1}$ $(n \in N, n > 1)$.

De aici $r_n < \frac{1}{2^n}$ $(n \in N)$ şi deci $r_n \to 0$. Conform teoremei Cantor, există un punct $b \in X$ ce aparţine tuturor sferelor $\bar{S}(x_n, r_n)$. Însă fiecare sferă $\bar{S}(x_n, r_n)$ nu conţine puncte din X_n şi deci $b \notin X_n$ $(n = 1, 2, ...)$. De aici rezultă că

$$b \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X.$$

Aşadar avem simultan $b \in X$ şi $b \notin X$.Contradicţie.

Din această teoremă obţinem o consecinţa importantă.

Consecinţă. Fie X un spaţiu metric complet şi $\{F_n\}_1^{\infty}$ un şir de mulţimi închise în X. Dacă

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

atunci cel puţin una din mulţimile F_n conţine o sferă $S(x_0, r)$.

Într-adevăr, din teorema Baire rezultă că cel puţin una din mulţimile F_n nu este rară. Fie această mulţime F_{n_0}. Atunci există o sferă $S(x_0, r_0)$ astfel încît orice sferă din $S(x_0, r_0)$

conţine puncte ale mulţimii F_{n_0}. Prin urmare orice punct $y \in S(x_0, r_0)$ este un punct de aderenţi al mulţimii F_{n_0}, adică $S(x_0, r_0) \subset \overline{F_{n_0}} = F_{n_0}$.

§ 12. Aplicaţii de contracţie. Principiul aplicatiilor de contractie

Fie X un spaţiu metric şi $A: X \to X$ o aplicaţie a spaţiului X în X.

Definiţia 1. Aplicaţia A se numeşte aplicaţie de contracţie, dacă există un număr $q < 1$ astfel încît pentru orice pereche de puncte $x, y \in X$ avem

$$\rho(Ax, Ay) \leq q\rho(x, y).$$

Definiţia 2. Punctul $x^* \in X$ se numeşte punct fix al aplicaţiei $A: X \to X$, dacă $Ax^* = x^*$.

<u>Teorema Banach</u> (principiul aplicaţiilor de contracţie). Într-un spaţiu metric complet orice aplicaţie de contracţie posedă un punct fix şi numai unul.

Demonstraţie. Fie x_0 un punct arbitrar din X. Formăm şirul $x_1 = Ax_0$, $x_2 = Ax_1$, ..., $x_n = Ax_{n-1}$, …

Avem : $\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Ax_n, Ax_{n-1}) \leq q\rho(x_n, x_{n-1})$. De aici, aplicînd metoda inducţiei matematice, obţinem

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leq q^n \rho(x_1, x_0) \qquad (n = 1, 2, \dots). \qquad (1)$$

Să arătăm că şirul $\{x_n\}_1^\infty$ este fundamental. Aplicăm inegalitatea poligonului şi inegalităţile (1) şi obţinem

$$\rho(x_{n+p}, x_n) \leq \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq$$
$$\leq (q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \dots + q^n)\ \rho(x_1, x_0).$$

De aici avem

$$\rho\left(x_{n+p}, x_n\right) \leq \frac{q^n - q^{n+p}}{1-q} \cdot \rho(x_1, x_0) \qquad (2)$$

Numărul $q < 1$ şi deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in N$, astfel încît

$$\rho\left(x_{n+p}, x_n\right) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot \rho(x_1, x_0) < \varepsilon \;\; (n > n_0, p \in \mathbb{N}),$$

ceea ce arată că şirul $\{x_n\}_1^\infty$ într-adevăr este fundamental. Spaţiul X fiind complet, şirul $\{x_n\}_1^\infty$ este convergent. Fie

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^*.$$

Avem

$$0 \leq \rho(Ax^*, x^*) \leq \rho(Ax^*, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x^*) = \rho(Ax^*, Ax_n) + \rho(x_{n+1}, x^*) \leq$$

$$\leq q\rho(x^*, x_n) + \rho(x_{n+1}, x^*) \to 0.$$

De aici rezultă, că $\rho(Ax^*, x^*) = 0$ şi, prin urmare, $Ax^* = x^*$. Existenţa punctului fix este demonstrată. Să demonstrăm acum unicitatea lui.

Dacă $Ax^* = x^*,\; Ay^* = y^*$, atunci

$$\rho(x^*, y^*) = \rho(Ax^*, Ay^*) \leq q\rho(x^*, y^*)$$

sau

$$(1 - q)\rho(x^*, y^*) \leq 0,$$

ceea ce este posibil numai dacă $\rho(x^*, y^*) = 0$ (deoarece $1 - q > 0$), adică $x^* = y^*$.

Observaţia 1. Din înseşi demonstraţia teoremei Banach rezultă că punctul fix x^* al aplicaţiei de contracţie se obţine prin metoda aproximaţiilor succesive, pornind de la un punct oarecare al spaţiului.

Această observaţie indică un procedeu practic pentru determinarea prin aproximaţie a punctului fix. Dacă în inegalitatea (2) trecem la limită cu $p \to \infty$, obţinem o evaluare a preciziei aproximaţiei:

$$\rho(x^*, x_n) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot \rho(x_1, x_0).$$

Observaţia 2. Condiţia $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$ nu este suficientă pentru existenţa punctului fix. Fie, de exemplu, $X = [1, \infty)$ cu distanţa $\rho(x, y) = | x - y |$. X este un spaţiu metric complet. Considerăm în X aplicaţia $Ax = x + \frac{1}{x}$. Dacă $x \neq y$ atunci

$$\rho(Ax, Ay) = \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| = |x - y| \cdot \left| 1 - \frac{1}{xy} \right| < |x - y| = \rho(x, y).$$

Aplicaţia A însă nu posedă un punct fix, deoarece pentru orice $x \in X$ avem

$$x + \frac{1}{x} \neq x.$$

Observaţia 3. Să ne amintim, că o funcţie f definită pe segmentul $[a, b]$ satisface condiţia Lipschitz dacă există un număr l , astfel încît

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq l\, |t_2 - t_1| \quad (t_1, t_2 \in [a, b]).$$

Dacă $l < 1$ şi f: $[a, b] \to [a, b]$, atunci f este o aplicaţie de contracţie şi deci şirul $t_0, t_1 = f(t_0), t_2 = f(t_1), \dots, t_n = f(t_{n-1})$, ... ($t_0 \in [a, b]$) converge către unica pe segmentul $[a, b]$ rădăcină a ecuaţiei $f(t) = t$.

În particular, condiţia Lipschitz cu $l < 1$ este satisfăcută, dacă f este derivabilă pe segmentul $[a, b]$ și

$$|f'(t)| \leq l < 1 \ \ (t \in [a, b]).$$

Observaţia 4. Într-un spațiu metric incomplet aplicația de contracție poate să nu posede un punct fix. Fie, de exemplu, $X = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cap Q$ cu distanța $\rho(x, y) = |x - y|$. Funcția

$Ax = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{4}$ aplică X în X, este aplicație de contracție cu $q = \frac{1}{2}$, însă nu posedă un punct fix (verificați).

§ 13. Aplicaţii generalizate de contracţie

Fie A o aplicaţie a spaţiului metric X în X. Ca de obicei prin A^2, A^3, …, A^n, …vom nota puterile aplicaţiei A, adică aplicaţiile definite prin formulele

$$A^2x = A(Ax), \qquad A^3x = A(A^2x), \dots, A^nx = A(A^{n-1}\,x), \dots$$

Definiţie. Aplicaţia A: $X \to X$ se numeşte aplicaţie generalizată de contracţie, dacă există $n_0 \in N$ astfel încît A^{n_0} este aplicaţie de contracţie.

Orice aplicaţie de contracţie, evident, este în acelaşi timp şi aplicaţie generalizată de contracţie. Afirmaţia reciprocă nu este adevărată. Sa dăm un exemplu. Fie aplicaţia A: $C[0,1] \to C[0,1]$ definită prin relaţia

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)ds.$$

Pentru $x(t) = 1$, $y(t) = 0$ avem $(Ax)(t) = t$, $(Ay)(t) = 0$ şi deci $\rho(x,y) = 1 = \rho(Ax, Ay)$. Prin urmare A nu este aplicaţie de contracţie. Să arătăm că A^2 este aplicaţie de contracţie. Avem

$$(A^2x)(t) = \int_0^t \left(\int_0^s x(\tau)d\tau \right) ds = \int_0^t \left(\int_\tau^t ds \right) x(\tau)d\tau = \int_0^t (t-\tau)x(\tau)d\,\tau,$$

$$\rho(A^2x, A^2y) = \max_{0\le t\le 1}|(A^2x)(t) - (A^2y)(t)| = \max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^t (t-\tau)\big(x(\tau) - y(\tau)\big)d\,\tau\right| \le$$

$$\le \max_{0\le t\le 1}\int_0^t (t-\tau)|x(\tau) - y(\tau)|d\,\tau \le \max_{0\le t\le 1}\int_0^t (t-\tau)\rho(x,y)d\,\tau =$$

$$= \rho(x,y)\max_{0\le t\le 1}\frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}\,\rho(x,y).$$

Pentru aplicaţiile generalizate de contracţie este adevărată următoarea teoremă.

Teoremă. Orice aplicaţie generalizată de contracţie într-un spaţiu metric complet posedă un punct fix şi numai unul.

Demonstraţie. Fie $A^{n_0} = B -$ aplicaţie de contracţie. Conform teoremei Banach , există un unic punct fix al aplicaţiei B. Fie $Bx^* = x^*$. Avem

$$B(Ax^*) = A^{n_0}(Ax^*) = A^{n_0+1}x^* = A(A^{n_0}x^*) = A(Bx^*) = Ax^*,$$

adică Ax^* este de asemenea un punct fix al aplicaţiei B. Însă punctul fix al aplicatiei B este unic şi deci $Ax^* = x^*$. Prin urmare punctul x^* este punct fix şi al aplicaţiei A. Se constată fără dificultate, că dacă y^* este un punct fix al aplicaţiei A, adică $Ay^* = y^*$, atunci $A^2y^* = y^*$, …, $A^{n_0}y^* = y^*$. Din unicitatea punctului fix al aplicaţiei $B = A^{n_0}$ rezultă că $y^* = x^*$. Deci aplicaţia A posedă un unic punct fix.

§ 14. Aplicaţii ale piincipiului de contracţie

Aplicaţiile de contracţie pot fi utilizate la demonstrarea existenţei şi unicităţii soluţiilor diverselor tipuri de ecuaţii. Mai mult decît atît. Demonstraţia teoremei Banach ne permite să afirmăm că aceste soluţii pot fi obţinute prin metoda aproximărilor succesive, iar formula (3) din §12, $-$ să evaluăm precizia aproximării. Ne vom limita aici doar la aplicarea rezultatelor obţinute în §12-13 la ecuaţii integrale şi la ecuaţii diferenţiale.

a) Ecuaţii integrale

Fie $k(t, s)$ o funcţie continuă pe pătratul $[a, b] \times [a, b]$. Considerăm în spaţiul $C[a, b]$ ecuaţia Fredholm de speţa a doua

$$x(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)x(s)ds = y(t), \tag{1}$$

unde $x, y \in C[a, b]$, $\lambda \in R$, $y(t)$ este o funcţie dată, iar $x(t)$ este funcţia necunoscută.

<u>**Teorema 1.**</u> Fie

$$M = \max_{a \le t,s \le b} |k(t,s)|.$$

Pentru orice $\lambda \in R$, $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ ecuaţia (1) are soluţie unică $x \in C[a, b]$ oricare ar fi $y \in C[a, b]$.

Demonstraţie. Considerăm în $C[a, b]$ aplicaţia

$$(Ax)(t) = \lambda \int_a^b k(t,s)x(s)ds + y(t).$$

Se vede uşor că orice punct fix al acestei aplicaţii este o soluţie a ecuaţiei (1) şi reciproc. Avem

$$|(Ax)(t) - (Az)(t)| = \left| \lambda \int_a^b k(t,s)x(s)ds + y(t) - \lambda \int_a^b k(t,s)z(s)ds - y(t) \right| \le$$

$$\le |\lambda| \cdot \int_a^b |k(t,s)||x(s) - z(s)|ds \le |\lambda| \cdot \int_a^b M\rho(x,z)ds = |\lambda| \cdot M(b-a)\rho(x,z).$$

De aici

$$\rho(Ax, Az) = \max_{a \le t \le b} |(Ax)(t) - (Az)(t)| \le q\rho(x,z),$$

unde $q = |\lambda| \cdot M(b-a)$. Din condiţia teoremei $q < 1$ şi deci A este o aplicaţie de contracţie. Prin urmare, conform teoremei Banach, A posedă un unic punct fix, adică ecuaţia (1) posedă o soluţie unică în $C[a, b]$ oricare ar fi $\lambda \in R$, $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ şi $y \in C[a, b]$.

Observaţie. Din demonstraţia teoremei Banach rezultă că, în condiţiile teoremei, soluţia ecuaţiei (1) este limita în spaţiul $C[a, b]$ al şirului $\{x_n\}_1^\infty$, unde $x_0(t)$ este o funcţie continua arbitrară , iar

$$x_1(t) = (Ax_0)(t) = \lambda \int_a^b k(t,s)x_0(s)ds + y(t),$$

$$x_2(t) = (Ax_1)(t) = \lambda \int_a^b k(t,s)x_1(s)ds + y(t),$$

…………………………………………………..

Să considerăm acum în $C[a, b]$ ecuaţia integrală Volterra de speţa a doua

$$x(t) - \lambda \int_a^t k(t,s)x(s)ds = y(t) \qquad (2)$$

Spre deosebire de ecuaţia Fredholm, aici limita superioară în integrală este variabilă.

Teorema 2. Pentru orice $\lambda \in R$ ecuaţia (2) posedă o soluţie unică $x \in C[a, b]$ oricare ar fi $y \in C[a, b]$.

Demonstraţie. Ca şi în teorema precedentă vom utiliza aplicaţiile de contracţie. În spaţiul $C[a, b]$ considerăm aplicaţia B definită astfel:

$$(Bx)(t) = \lambda \int_a^t k(t,s)x(s)ds + y(t).$$

Este clar că B: $C[a, b] \to C[a, b]$ şi $x(t)$ este soluţia ecuaţiei (2), dacă şi numai dacă x este un punct fix al aplicaţiei B.

Să demonstrăm la început că B este o aplicaţie generalizată de contracţie. Avem

$$|(Bx)(t)-(Bz)(t)| = |\lambda|\cdot\left|\int_a^t k(t,s)\big(x(s)-z(s)\big)ds\right|$$

$$\leq |\lambda|\cdot\int_a^t |k(t,s)||x(s)-z(s)|ds$$

Dacă punem

$$M = \max_{a\leq t,s\leq b}|k(t,s)|,$$

atunci din ultima inegalitate obţinem

$$|(Bx)(t)-(Bz)(t)| \leq |\lambda|\cdot M(t-a)\rho(x,z). \tag{3}$$

Prin inducţie uşor stabilim că

$$|(B^n x)(t)-(B^n z)(t)| \leq |\lambda|^n\cdot M^n\frac{(t-a)^n}{n!}\rho(x,z). \tag{4}$$

Această inegalitate este adevărată pentru $n = 1$ (inegalitatea (3)). Fie (4) adevărată pentru $n = k$. Vom demonstra că (4) este adevărată şi pentru $n = k + 1$.

Avem:

$$\left|(B^{k+1}x)(t)-(B^{k+1}z)(t)\right| = \left|B(B^k x)(t)-B(B^k z)(t)\right| =$$

$$= \left|\lambda\int_a^t k(t,s)(B^k x)(s)ds + y(t) - \lambda\int_a^t k(t,s)(B^k z)(s)ds - y(t)\right| \leq$$

$$\leq |\lambda|\cdot\int_a^t |k(t,s)|\left|(B^k x)(s)-(B^k z)(s)\right|ds \leq |\lambda|\cdot\int_a^t M|\lambda|^k\cdot M^k\frac{(s-a)^k}{k!}\rho(x,z)ds =$$

$$= |\lambda|^{k+1}\cdot M^{k+1}\rho(x,z)\int_a^t\frac{(s-a)^k}{k!}ds = |\lambda|^{k+1}\cdot M^{k+1}\frac{(t-a)^{k+1}}{(k+1)!}\rho(x,z),$$

adică inegalitatea (4) este adevărată şi pentru $n = k + 1$. Conform principiului inducţiei matematice, inegalitatea (4) este adevărată pentru orice $n \in N$.

Din (4) obţinem

$$\rho(B^n x, B^n z) = \max_{a \le t \le b} |(B^n x)(t) - (B^n z)(t)| \le \frac{|\lambda|^n \cdot M^n (b-a)^n}{n!} \rho(x, z). \qquad (5)$$

Din cursul de analiză matematică se ştie, că pentru orice $c \in R$ are loc relaţia

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c^n}{n!} = 0.$$

De aici (dacă punem c= $|\lambda| \cdot M(b-a)$ rezultă existenţa numărului $n_0 \in N$, astfel încît

$$q = \frac{|\lambda|^{n_0} \cdot M^{n_0} (b-a)^{n_0}}{n_0!} < 1. \qquad (6)$$

Din inegalităţile (5) şi (6) avem

$$\rho(B^{n_0} x, B^{n_0} z) \le q\rho(x, z) \qquad (\ q < 1\ )$$

şi deci B este aplicaţie generalizată de contracţie. Conform teoremei din §13, B posedă un unic punct fix în $C[a, b]$ şi deci ecuaţia (2) – o soluţie unică în $C[a, b]$.

Să dăm un exemplu de aplicaţie a teoremei de mai sus. Considerăm în $C[0, 1]$ ecuaţia

$$x(t) - \int_0^t (s-t)x(s)ds = t.$$

Aici $k(t, s) = s - t$, $y(t) = t$,

$$(Bx)(t) = \int_0^t (s-t)x(s)ds + t.$$

Fie $x_0(t) = 0$. Atunci

$$x_1(t) = (Bx_0)(t) = \int_0^t (s-t)x_0(s)ds + t = t,$$

$$x_2(t) = (Bx_1)(t) = \int_0^t (s-t)x_1(s)ds + t = \int_0^t (s-t)sds + t = t - \frac{t^3}{3!},$$

$$x_3(t) = (Bx_2)(t) = \int_0^t \left(s - \frac{s^3}{3!}\right)(s-t)ds + t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}.$$

Se vede uşor că

$$x_n(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Însă x_n converge în $C[0, 1]$ către x, unde $x(t)$ = sin t . Pe de altă parte, din demonstraţia teoremei Banach despre punctul fix rezultă că x_n converge către punctul fix al aplicaţiei B, adică către soluţia ecuaţiei (7). Deci unica soluţie a ecuaţiei (7) este $x(t) = \sin t$.

b) Ecuații diferențiale

Fie $f(x, y)$ o funcţie continuă într-un domeniu G şi care satisface în acest domeniu condiţia Lipchitz în raport cu y, adică există $L > 0$, astfel încît pentru orice (x, y_1), (x, y_2) din G avem

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Fie $P(x_0, y_0) \in G$. Vom demonstra că într-o vecinătate a punctului x_0 ecuaţia diferenţială

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{8}$$

are o soluţie unică şi care satisface condiţia iniţială

$$y(x_0) = y_0. \tag{9}$$

Se vede uşor că ecuaţia (8) cu condiţia (9) este echivalentă cu ecuaţia integrală

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)dt \qquad (10)$$

Considerarăm o sferă $\bar{S}(P, r) \subset G$. Funcţia f fiind continuă în $\bar{S}(P, r)$, este mărginită, deci există M astfel încît $|f(x,y)| \leq M$ pentru orice $(x, y) \in \bar{S}(P, r)$. Să alegem $d > 0$ cu proprietăţile: 1) $Ld < 1$; 2) $|x - x_0| \leq d,\ |y - y_0| \leq Md$ implică $(x,y) \in S(P,r)$. În spaţiul $C[x_0 - d, x_0 + d]$ mulţimea $F = \{\varphi: |\varphi(x) - y_0| \leq Md\}$ este închisă şi, deoarece $C[x_0 - d, x_0 + d]$ este spaţiu complet, rezultă că F este de asemenea un spaţiu metric complet cu metrica din $C[x_0 - d, x_0 + d]$. Considerăm aplicaţia

$$(A\varphi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)dt \qquad (\varphi \in F, x \in [x_0 - d, x_0 + d]).$$

Ea aplică F în F, deoarece

$$|(A\varphi)(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f\big(t, \varphi(t)\big)dt\right| \leq Md.$$

Cum însă

$$|(A\varphi_1)(t) - (A\varphi_2)(t)| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \big|f\big(t, \varphi_1(t)\big) - f\big(t, \varphi_2(t)\big)\big|dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} L|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|dt\right| \leq L\rho(\varphi_1, \varphi_2) \cdot |x - x_0|\ ,$$

avem

$$\rho(A\varphi_1, A\varphi_2) = \max_{[x_0 - d, x_0 + d]} |(A\varphi_1)(x) - (A\varphi_2)(x)| \leq Ld\rho(\varphi_1, \varphi_2).$$

Întrucît $q = Ld < 1$, din ultima inegalitate conchidem că A este aplicaţie de contracţie a spaţiului complet F în F şi deci A posedă în F un unic punct fix. Acest punct fix este unica soluţie a ecuaţiei integrale (10) şi deci unica soluţie a ecuaţiei diferenţiale (8) cu condiţia iniţială (9).

§ 15. Mulţimi compacte

În analiza matematică un rol important îi revine teoremei Bolzano-Weierstrass despre posibilitatea extragerii unui subşir convergent din orice şir numeric mărginit. În spaţiile metrice arbitrare astfel de posibilitate nu este, adică există mulţimi mărginite ce nu conţin subşiruri convergente. De exemplu, în spaţiul l_p ($l \leq p < \infty$) mulţimea $M = \{e_n\}_1^\infty$, (e_n = (0, …, 0, 1, 0)) evident este mărginită, însă $\rho(e_i, e_j) = 2^{\frac{1}{p}}$ şi deci orice subşir al şirului $\{e_n\}_1^\infty$ nu este fundamental şi, prin urmare, nu este nici convergent.

În legătură cu aceasta, în spaţiile metrice se introduce noţiunea de mulţime relativ compactă.

Definiţia 1. Mulţimea M din spaţiul metric X se numeşte relativ compactă, dacă din orice şir $\{x_n\}_1^\infty \subset M$ se poate extrage un subşir convergent $\{x_{n_k}\}_1^\infty$.

Definiţia 2. Mulţimea M se numeşte compactă, dacă din orice şir $\{x_n\}_1^\infty \subset M$ se poate extrage un subşir $\{x_{n_k}\}_1^\infty$ convergent la un punct $x_0 \in M$.

Se vede uşor că mulţimea M este compactă, dacă şi numai dacă ea este relativ compactă şi închisă.

Exemple. În spaţiul metric $X = R$:

a) mulţimea $M = (a, b)$ este relativ compactă, însă nu este compactă;
b) $M = [a, b]$ este mulţime compactă;
c) $M = N$ nu este relativ compactă (şirul $\{x_n\}_1^\infty$, $x_n = n$ nu conţine subşiruri convergente).

Teorema 1. Orice mulţime relativ compactă este mărginită.

Demonstraţie. Fie M o mulţime relativ compactă în spaţiul metric X. Admitem că M nu este mărginită. Atunci pentru orice $n \in N$ şi $a \in X$ mulţimea M nu se conţine în sfera $S(a, n)$. Deci există $x_n \in M$, $x \notin S(a, n)$, adică $\rho(a, x_n) \geq n$ (n = 1, 2, …). Şirul $\{x_n\}_1^\infty$ conţine un subşir convergent $\{x_{n_k}\}_1^\infty$. Fie

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0.$$

Din continuitatea distanţei în spaţiul metric avem

$$\lim_{k\to\infty} \rho\left(x_{n_k}, a\right) = \rho(x_0, a).$$

Pe de altă parte $\rho\left(x_{n_k}, a\right) \geq n_k$ (k = l, 2, ...) şi deci

$$\lim_{k\to\infty} \rho\left(x_{n_k}, a\right) = \infty,$$

ceea ce este imposibil. Contradicţie.

Observaţie. Exemplul de la începutul paragrafului ne arată că afirmaţia reciprocă teoremei 1 nu este adevărată în cazul spaţiilor metrice arbitrare.

Pentru spaţiile R^m şi C^m este adevărată :

Teorema 2. Mulţimea M $\subset R^m$ (sau M $\subset C^m$) este relativ compactă, dacă şi numai dacă ea este mărginită.

Demonstraţie. Necesitatea rezultă din teorema 1. Să demonstrăm suficienţa , care de fapt este cunoscută din analiza matematică (teorema Bolzano-Weierstass pentru spaţiul R^m). Pentru simplitate vom examina cazul spaţiului R^2. Fie deci M o mulţime mărginită în R^2 şi $x_n \in M$ (n = l, 2, ...), $x_n = \left(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}\right)$. Mulţimea M fiind mărginită, există o sferă ce contine această mulţime. Fără a restrînge generalitatea, putem presupune că centrul sferei este punctul O(0, 0) şi deci $M \subset S(0, r)$. Avem $x_n \in S\,(0, r)$, de unde obţinem

$$\left|\xi_k^{(n)}\right| \leq \sqrt{\left(\xi_1^{(n)} - 0\right)^2 + \left(\xi_2^{(n)} - 0\right)^2} = \rho(x_n, 0) \leq r \quad (n = 1,2,\dots; k = 1,2) \quad (1).$$

Conform inegalităţii (1), şirul numeric $\left\{\xi_1^{(n)}\right\}_1^\infty$ este mărginit şi deci conţine un subşir $\left\{\xi_1^{(n_k)}\right\}_1^\infty$ convergent. Fie

$$\lim_{k\to\infty} \xi_1^{(n_k)} = \xi_1.$$

Considerăm acum şirul numeric $\left\{\xi_2^{(n_k)}\right\}_1^\infty$. În virtutea inegalităţii (1) el este de asemenea mărginit şi deci conţine un subşir $\left\{\xi_2^{\left(n_{k_j}\right)}\right\}_1^\infty$ convergent.Fie

$$\lim_{j\to\infty} \xi_2^{\left(n_{k_j}\right)} = \xi_2.$$

Şirul $\left\{\xi_1^{\left(n_{k_j}\right)}\right\}_1^\infty$, fiind un subşir al şirului convergent $\left\{\xi_1^{(n_k)}\right\}_1^\infty$, este convergent de asemenea către ξ_1. De aici obţinem: şirul $\left\{x_{n_{k_j}}\right\}_1^\infty$ $\left(x_{n_{k_j}} = \left(\xi_1^{\left(n_{k_j}\right)}, \xi_2^{\left(n_{k_j}\right)}\right)\right)$ converge în coordonate către $x = (\xi_1, \xi_2)$. Deoarece convergenţa în R^2 este echivalentă cu convergenţa în coordonate, rezultă că şirul $\left\{x_{n_{k_j}}\right\}_1^\infty$ este convergent în spaţiul R^2 şi deci mulţimea M este relativ compactă. Cazul general se examinează în mod analog.

Teorema 3. Intersecţia unui şir descrescător de mulţimi compacte nevide $\{F_n\}_1^\infty$ este o mulţime compactă nevidă. Dacă diametrul mulţimilor F_n tinde la zero, intersecţia lor se reduce la un punct.

Demonstraţie. Fie $\{F_n\}_1^\infty$ un şir descrescător de mulţimi compacte din spaţiul X. Luăm în fiecare F_n un element x_n. Obţinem şirul $\{x_n\}_1^\infty$ situat în F_1. Mulţimea F_1 fiind compactă, putem extrage un subşir $\left\{x_{n_k}\right\}_1^\infty$ convergent la $x_0 \in F_1$. Însă şirul $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=2}^\infty$ este situat în $F_{n2} \subset F_2$ şi deci $x_0 \in F_2$. Obţinem astfel succesiv

$x_0 \in F_j$ $(j \in N)$, deoarece $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=j}^\infty \subset F_{n_j} \subset F_j$. Aceasta ne arată că

$$x_0 \in \bigcap_{j=1}^\infty F_j.$$

Deci intersecţia şirului de mulţimi $\left\{F_j\right\}_1^\infty$ nu este vidă. Intersecţia mulţimilor închise

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} F_j = \mathrm{F}$$

este o mulţime închisă şi întrucît $\mathrm{F} \subset F_1$, iar F_1 este o mulţime compactă, rezultă că

$$\mathrm{F} = \bigcap_{j=1}^{\infty} F_j$$

este mulţime compactă. Dacă

$$\lim_{n\to\infty} diam\, F_n = 0$$

şi $x, y \in F_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), atunci

$$0 \leq \rho(x, y) \leq diam\, F_n \to 0$$

şi deci $\rho(x, y) = 0$, adică $x = y$. Prin urmare, există numai un punct comun tuturor mulţimilor F_n.

§ 16. Teorema Hausdorff şi unele consecinţe

Definiţia 1. Fie $\varepsilon > 0$ un număr pozitiv arbitrar. Mulţimea A din spaţiul metric X se numeşte ε - reţea pentru mulţimea $M \subset X$, dacă pentru orice $x \in M$ există $y \in A$, astfel ca $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Cu alte cuvinte, mulţimea A este o ε - reţea pentru mulţimea M, dacă orice element x din M poate fi aproximat cu elemente din A cu precizie de $\varepsilon > 0$.

Definiţia 2. Se spune că mulţimea $M \subset X$ este total mărginită, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr finit de puncte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din M, astfel încît

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{n} S(x_k, \varepsilon).$$

Se vede uşor că este adevărată :

Teorema 1. Mulţimea $M \subset X$ este total mărginită, dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o ε - reţea finită pentru această mulţime.

Demonstraţie. *Necesitatea*. Fie mulţimea M total mărginită şi $\varepsilon > 0$. Avem

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{n} S(x_k, \varepsilon)$$

şi deci pentru orice $x \in M$ există o sferă $S(x_{k_0}, \varepsilon)$, care conţine x. De aici $\rho(x, x_{k_0}) < \varepsilon$ şi, prin urmare, mulţimea $A = \{x_k\}_1^n$ este o ε - reţea finită pentru mulţimea M.

Suficienţa. Fie că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o ε - reţea finită pentru mulţimea M. Notăm această ε-reţea prin $A = \{x_k\}_1^n$ **.** Deci pentru orice $x \in M$ există $x_j \in A$ astfel încît $\rho(x, x_j) < \varepsilon$, ceea ce implică

$$x \in S(x_j, \varepsilon) \subset \bigcup_{k=1}^{n} S(x_k, \varepsilon).$$

De aici

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{n} S(x_k, \varepsilon),$$

adică M este total mărginită.

Teorema 2. (Hausdorff). Pentru ca mulţimea M din spaţiul metric X să fie relativ compactă este necesar, iar dacă spaţiul X este complet, atunci şi suficient, ca M să fie total mărginită.

Demonstraţie. *Necesitatea*. Fie mulţimea M relativ compactă şi $\varepsilon > 0$. Luăm un $x_1 \in M$. Dacă $M \not\subset S(x_1, \varepsilon)$, atunci există $x_2 \in M$, $x_2 \notin S(x_1, \varepsilon)$ şi deci $\rho(x_1, x_2) \geq \varepsilon$.

Dacă

$$M \not\subset \bigcup_{k=1}^{2} S(x_k, \varepsilon),$$

atunci există

$$x_3 \notin \bigcup_{k=1}^{2} S(x_k, \varepsilon),$$

$x_3 \in M$ şi deci $\rho(x_1, x_3) \geq \varepsilon$, $\rho(x_2, x_3) \geq \varepsilon$. Prelungim acest proces de extragere din mulţimea M a elementelor x_k. Fie că putem extrage o mulţime infinită de astfel de elemente diferite $\{x_k\}_1^\infty \in M$. Atunci

$$\rho(x_k, x_j) \geq \varepsilon > 0 \quad (k \neq j). \qquad (1)$$

Mulţimea M fiind relativ compactă , există un subşir $\{x_{k_i}\}_1^\infty$ convergent şi deci fundamental. Prin urmare, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $i_0 \in N$, astfel încît $\rho(x_{k_i}, x_{k_m}) < \varepsilon \ (i, m \geq i_0)$, ceea ce este în contradicţie cu inegalitatea (1). De aici rezultă, că există un sistem finit $\{x_k\}_1^n$ cu proprietatea

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{n} S(x_k, \varepsilon).$$

Suficienţa. Fie spaţiul X complet şi mulţimea $M \subset X$ total mărginită, iar $\{x_n\}_1^\infty \subset M$. Să luăm un şir de numeric $\varepsilon_n > 0$; $\varepsilon_n \to 0$. Mulţimea M fiind total mărginită, avem

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{m_1} S\left(z_j^{(1)}, \varepsilon_1\right)$$

şi deci măcar una din aceste sfere conţine un subşir al şirului $\{x_n\}_1^\infty$. Notăm acest subşir prin $\left\{x_n^{(1)}\right\}_1^\infty$. Deoarece M este total mărginită, există $\left\{z_j^{(2)}\right\}_1^{m_2} \subset M$ astfel încît

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{m_2} S\left(z_j^{(2)}, \varepsilon_2\right)$$

şi deci măcar una din sferele $S\left(z_j^{(2)},\varepsilon_2\right)$ conţine un subşir al şirului $\left\{x_n^{(1)}\right\}_1^\infty$. Notăm acest subşir prin $\left\{x_n^{(2)}\right\}_1^\infty$. Prelungim acest proces la nesfîrşit şi obţinem şirurile $\left\{x_n^{(i)}\right\}_{n=1}^\infty$ (i = l, 2, ...) cu proprietăţile:

1. Fiecare şir $\left\{x_n^{(i+1)}\right\}_{n=1}^\infty$ este un subşir al şirului $\left\{x_n^{(i)}\right\}_{n=1}^\infty$;
2. $\left\{x_n^{(i)}\right\}_{n=1}^\infty \subset S\left(z_j^{(i)},\varepsilon_i\right)$.

Formăm şirul „diagonal" $\left\{x_n^{(n)}\right\}_1^\infty$, adică primul element din primul şir, al doilea element din al doilea şir ş.a.m.d. Să arătăm că acest şir este fundamental. Fie ε > 0. Deoarece $\left\{x_i^{(i)}\right\}_1^\infty$ şi $\left\{x_{i+k}^{(i+k)}\right\}_1^\infty$ ($k \in N$) sînt elemente din şirul $\left\{x_n^{(i)}\right\}_{n=1}^\infty$, rezultă că $\left\{x_i^{(i)}\right\}_1^\infty, \left\{x_{i+k}^{(i+k)}\right\}_1^\infty \subset S\left(z_j^{(i)},\varepsilon_i\right)$ şi deci $\rho\left(x_i^{(i)},x_{i+k}^{(i+k)}\right) < 2\varepsilon_i$ ($k \in N$).

Întrucît

$$\lim_{i\to\infty}\varepsilon_i = 0,$$

rezultă că există $i_0 \in N$ astfel încît $\varepsilon_i < \frac{\varepsilon}{2}$ $(i \geq i_0)$ şi deci pentru orice $i \geq i_0$ şi orice $k \in N$ avem $\rho\left(x_i^{(i)},x_{i+k}^{(i+k)}\right) < 2\varepsilon_i < \varepsilon$. Prin urmare, şirul $\left\{x_i^{(i)}\right\}_1^\infty$ este fundamental. Spaţiul X fiind complet, rezultă că $\left\{x_i^{(i)}\right\}_1^\infty$ este convergent. Ne-a mai rămas să observăm , că $\left\{x_i^{(i)}\right\}_1^\infty$ este un subşir al şirului $\{x_n\}_1^\infty$.

Consecinţa 1. Pentru ca mulţimea M din spaţiul metric complet X să fie relativ compactă, este suficient ca pentru orice ε > 0 să existe o ε - reţea relativ compactă a mulţimii M.

Fie ε > 0 şi B - o $\frac{\varepsilon}{2}$ – reţea relativ compactă a mulţimii *M*. Pentru orice $x \in M$ există $y \in B$ cu $\rho(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Din teorema Hausdorff există o $\frac{\varepsilon}{2}$ - reţea finită *A* pentru mulţimea *B* şi deci există $z \in A$ astfel încît $\rho(y,z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Avem

$$\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Prin urmare mulţimea *A* formează o ε - reţea finită pentru mulţimea *M*. Din teoremele 1 şi 2 rezultă ca *M* este relativ compactă.

Consecinţa 2. Orice spaţiu metric compact *X* este separabil. Fie $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$. Din teorema Hausdoff rezultă existenţa elementelor $\left\{z_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{m(n)}$, astfel încît

$$X = \bigcup_{i=1}^{m(n)} S\left(z_i^{(n)}, \varepsilon_n\right).$$

Notăm

$$A_n = \left\{z_i^{(n)}\right\}_{i=1}^{m(n)}, \qquad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Mulţimea *A* este cel mult numărabilă (ca reuniunea unei mulţimi numărabile de mulţimi finite). Ea este şi peste tot densă. Într-adevăr, fie $x \in X$, ε > 0. Alegem $\varepsilon_{n_0} < \varepsilon$ şi deoarece

$$X = \bigcup_{i=1}^{m(n_0)} S\left(z_i^{(n_0)}, \varepsilon_{n_0}\right)$$

avem: există o sferă $S\left(z_{i_0}^{(n_0)}, \varepsilon_{n_0}\right)$ ce conține *x* , deci $\rho\left(x, z_{i_0}^{(n_0)}\right) < \varepsilon_{n_0} < \varepsilon$. Prin urmare $x \in \bar{A}$ și deci *A* este peste tot densă.

§ 17. Criteriul de compacitate în spaţiul $C[a, b]$

Definiţia 1. Funcţiile mulţimii $M \subset C[a, b]$ se numesc egal continue (sau echicontinue), dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta > 0$ astfel încît relaţiile $t', t'' \in [a, b]$, $|t' - t''| < \delta$ implică $| x(t') - x(t'') | < \varepsilon$ oricare ar fi funcţia $x \in M$.

Exemple . 1. Dacă mulţimea $M \subset C[a, b]$ este finită, atunci funcţiile acestei mulţimi sînt egal continue. Într-adevăr, fie $M = \{x_j\}_1^m \subset C[a, b]$ şi $\varepsilon > 0$. Conform teoremei Cantor fiecare din funcţiile x_j este uniform continuă pe $[a, b]$ şi deci există $\delta_j > 0$, astfel încît $t', t'' \in [a, b]$, $|t' - t''| < \delta_j$ implică $| x_j(t') - x_j(t'') | < \varepsilon$. Se vede uşor că

$$\delta = \min_{1 \le j \le m} \delta_j > 0$$

satisface condiţiei din definiţia mulţimii de funcţii egal continue.

2. Fără dificultate se constată că funcţiile mulţimii $M = \{\sin nt\}_1^\infty \subset C[0,1]$ nu sint egal conttinue (punem, de exemplu, $t' = 0$, $t'' = \frac{\pi}{2n}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$).

Definiţia 2. Mulţimea $M \subset C[a, b]$ se numeşte uniform mărginită, dacă există o constantă $\alpha > 0$, astfel încît pentru orice $x \in M$ şi orice $t \in [a, b]$ avem $| x(t) | \le \alpha$.

Teorema Arzelà-Ascoli. Mulţimea $M \subset C[a, b]$ este relativ compactă, dacă şi numai dacă ea este uniform mărginită şi funcţiile acestei mulţimi sînt egal continue.

Demonstraţie. *Necesitatea*. Fie $M \subset C[a, b]$ o mulţime relativ compactă şi deci mărginită în spaţiul metric $C[a, b]$, adică există $\alpha > 0$ astfel încît $\rho(x, 0) \le \alpha$ $(x \in M)$. De aici $| x(t) | \le \alpha$ $(t \in [a, b],\ x \in M)$, adică mulţimea M est mărginită uniform. Să demonstrăm că funcţiile mulţimii M sînt egal continue. Fie $\varepsilon > 0$ şi $\{x_j\}_1^m \subset M$ o $\frac{\varepsilon}{3}$-reţea finită a mulţimii M (existenţa unei astfel de reţea rezultă din teorema Hausdorff). Conform exemplului 1, funcţiile $\{x_j\}_1^m \subset M$ sînt egal continue şi deci există $\delta > 0$ astfel încît $t', t'' \in [a, b], |t' - t''| < \delta$ implică $|x_j(t') - x_j(t'')| < \frac{\varepsilon}{3}$. Pentru orice $x \in M$

există x_k $(1 \leq k \leq m)$ cu $\rho(x, x_k) < \frac{\varepsilon}{3}$, adică $|x(t) - x_k(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(a \leq t \leq b)$. Pentru $t', t'' \in [a, b]$, $|t' - t''| < \delta$ avem

$$|x(t') - x(t'')| \leq |x(t') - x_k(t')| + |x_k(t') - x_k(t'')| + |x_k(t'') - x(t'')| \leq$$

$$\leq \rho(x, x_k) + \frac{\varepsilon}{3} + \rho(x, x_k) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Aşadar, dacă mulţimea M este relativ compactă, atunci ea este uniform mărginită şi funcţiile acestei mulţimi sunt egal continue.

Suficienţa. Fie $M \subset C[a, b]$ o mulţime uniform mărginită, adică

$$|x(t)| \leq \alpha \qquad (t \in [a, b], x \in M\,), \tag{1}$$

funcţiile căreia sunt egal continue.

Considerăm un şir arbitrar $\{x_n\}_1^\infty \subset M$. Notăm prin $\{t_j\}_1^\infty$ o mulţime densă în $[a, b]$ (de exemplu, Q $\cap$ $[a, b]$). În virtutea inegalităţii (1), şirul numeric $\{x_n(t_1)\}_1^\infty$ este mărginit şi deci conţine un subşir convergent $\left\{x_n^{(1)}(t_1)\right\}_1^\infty$.

Considerăm acum subşirul $\left\{x_n^{(1)}\right\}_1^\infty$ al şirului $\{x_n\}_1^\infty$. Din (1) avem că şirul $\left\{x_n^{(1)}(t_2)\right\}_1^\infty$ este mărginit şi deci conţine un subşir convergent $\left\{x_n^{(2)}(t_2)\right\}_1^\infty$.

Continuăm acest proces la nesfîrşit şi obţinem şirurile $\left\{x_n^{(k)}\right\}_{n=1}^\infty$ $(k = 1, 2, \ldots)$ cu proprietăţile:

a) $\left\{x_n^{(k+1)}\right\}_{n=1}^\infty$ este un subşir al şirului $\left\{x_n^{(k)}\right\}_{n=1}^\infty$;
b) şirul numeric $\left\{x_n^{(k)}(t_k)\right\}_1^\infty$ este convergent.

Formăm şirul „diagonal" $\left\{x_n^{(n)}\right\}_1^\infty$. Din a) şi b) rezultă că şirul numeric $\left\{x_n^{(n)}(t_j)\right\}_1^\infty$ este convergent pentru orice $j \in N$. Funcţiile mulţimii M fiind egal continue , pentru orice

ε > 0 există un număr δ > 0, astfel încît $|x(t') - x(t'')| < \frac{\varepsilon}{3}$ oricare ar fi $t', t'' \in [a,b], |t' - t''| < \delta$ şi $x \in M$. Avînd numărul δ > 0, alegem o submulţime finită $\{\tau_k\}_1^m$ a şirului $\{t_j\}_1^\infty$ astfel ca pentru orice $t \in [a, b]$ să existe $\tau_k : |t - \tau_k| < \delta$. Şirul $\left\{x_n^{(n)}\right\}_1^\infty$ este convergent în orice punct τ_k $(1 \le k \le m)$ şi deci există $n_0 \in N$ astfel încît

$$\left|x_{n+p}^{(n+p)}(\tau_k) - x_n^{(n)}(\tau_k)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (n \ge n_0; p \in N; k = 1,2,\dots m).$$

Pentru $n \ge n_0$, $p \in N$ avem

$$\left|x_{n+p}^{(n+p)}(t) - x_n^{(n)}(t)\right| \le \left|x_{n+p}^{(n+p)}(t) - x_{n+p}^{(n+p)}(\tau_k)\right| + \left|x_{n+p}^{(n+p)}(\tau_k) - x_n^{(n)}(\tau_k)\right| +$$

$$+\left|x_n^{(n)}(\tau_k) - x_n^{(n)}(t)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

De aici:

$$\rho\left(x_{n+p}^{(n+p)}, x_n^{(n)}\right) = \max_{a \le t \le b}\left|x_{n+p}^{(n+p)}(t) - x_n^{(n)}(t)\right| < \varepsilon \;\; (n \ge n_0; p \in N),$$

adică şirul $\left\{x_n^{(n)}\right\}_1^\infty$ este fundamental în $C[a, b]$ şi, deci convergent.

§ 18. Acoperiri. Teorema Borel

Definiţie. Fie X un spaţiu metric şi M o mulţime din X. Se numeşte acoperire a mulţimii M orice familie $\{M_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ de submultimi ale lui X , aşa ca

$$M \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma.$$

Dacă Γ este o mulţime finită, se zice că acoperirea este finită. O acoperire formată din mulţimi deschise , pe scurt, se numeşte acoperire deschisă.

Teorema Borel. O mulţime închisă F din spaţiul metric X este compactă, dacă şi numai dacă din orice acoperire deschisă a ei se poate extrage o subacoperire finită.

Demonstraţie. *Necesitatea*. Fie F o mulţime compactă şi $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ o acoperire deschisă oarecare a mulţimii F. Admitem că această acoperire nu conţine o subacoperire finită şi fie $\{\varepsilon_n\}_1^\infty, \varepsilon_n > 0$ $-$ un şir convergent la zero. Conform teoremei Hausdorff , mulţimea F este total mărginită şi deci există $\left\{x_i^{(1)}\right\}_1^{m_1}$ astfel încît

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{m_1} S\left(x_i^{(1)}, \varepsilon_1\right) \subset \bigcup_{i=1}^{m_1} \bar{S}\left(x_i^{(1)}, \varepsilon_1\right).$$

Evident, mulţimile $F_i = F \cap \bar{S}\left(x_i^{(1)}, \varepsilon_1\right)$ (i = l, …, m) sînt compacte, diam $F_i \le 2\varepsilon_1$ şi

$$F = \bigcup_{i=1}^{m_1} F_i.$$

Mulţimea M, după cum am presupus, nu poate fi acoperită cu un număr finit de mulţimi $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Prin urmare măcar una din mulţimile F_i (i = l, 2, ... m_1) posedă aceeaşi proprietate. Fie această mulţime F_{i_1}. Repetăm acelaşi raţionament cu mulţimea compactă F_{i_1} şi numărul $\varepsilon_2 > 0$ şi obţinem mulţimea compactă $F_{i_1 i_2} \subset F_{i_1}$, astfel încît *diam* $F_{i_1 i_2} \le 2\varepsilon_2$ şi ea nu poate fi acoperită cu un număr finit de mulţimi din familia $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Prelungim acest proces la nesfirşit şi obţinem şirul de mulţimi compacte $\{F_{i_1 i_2 \dots i_n}\}_{n=1}^\infty$ cu proprietăţile: a) $F_{i_1 i_2 \dots i_{n+1}} \subset F_{i_1 i_2 \dots i_n}$; $b) diam\, F_{i_1 i_2 \dots i_n} \le 2\varepsilon_n$; c) fiecare din mulţimile $F_{i_1 i_2 \dots i_n}$ in nu poate fi acoperită cu un număr finit de mulţimi din familia $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.

Din a), conform teoremei 3, §15, rezultă existenţa unui punct $x_0 \in F_{i_1 i_2 \dots i_n}$ (n = l, 2, ...). Întrucît $x_0 \in F \subset \bigcup_{\gamma\in\Gamma} G_\gamma$, există γ_0, astfel încît $x_0 \in G\gamma_0$. Mulţimea $G\gamma_0$ este deschisă şi prin urmare în ea se conţine o sferă $S(x_0, \varepsilon)$. Alegem $n_0 \in N$, astfel ca $\varepsilon_{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci din b) avem: *diam* $F_{i_1 i_2 \dots i_{n_0}} < 2\varepsilon_{n_0} < \varepsilon$. Întrucît $x_0 \in F_{i_1 i_2 \dots i_{n_0}}$ şi diametrul acestei mulţimi este mai mic decît ε , rezultă că $F_{i_1 i_2 \dots i_{n_0}} \subset S(x_0, \varepsilon)$. Sfera

$S(x_0, \varepsilon)$ se include în $G\gamma_0$ şi deci $F_{i_1 i_2 \dots i_{n_0}} \subset G\gamma_0$. Prin urmare, mulţimea $F_{i_1 i_2 \dots i_{n_0}}$ este acoperită cu o singură mulţime din familia $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Aceasta însă contrazice condiţiei c). Aşadar, presupunerea este falsă şi deci familia $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ conţine o subacoperire finită a mulţimii *F*.

Suficienţa. Fie *F* o mulţime închisă ce posedă proprietatea : orice acoperire deschisă a mulţimii *F* conţine o subacoperire finită. Vom demonstra că *F* este compactă. Fie $\{x_n\}_1^\infty$ un şir arbitrar din *F*. Considerăm 2 cazuri:

a) şirul $\{x_n\}_1^\infty$ conţine un subşir constant $\{x_{n_k}\}_1^\infty$, $x_{n_k} = x$ $(k = 1, 2, ...)$. În acest caz avem subşirul convergent $\{x_{n_k}\}_1^\infty$;
b) şirul$\{x_n\}_1^\infty$ nu conţine un subşir constant. În acest caz el conţine o infinitate de elemente diferite. Fie $\{y_n\}_1^\infty$ subşirul elementelor diferite (două cîte două) ale şirului $\{x_n\}_1^\infty$. Admitem că $\{y_n\}_1^\infty$ nu conţine nici un subşir convergent. Atunci orice $z \in F$ nu este limită a unui subşir al şirului $\{y_n\}_1^\infty$ şi, prin urmare, există o sferă $S(z, \varepsilon_z)$, care nu conţine nici un punct din şirul $\{y_n\}_1^\infty$, cu excepţia poate a punctului *z* (deci conţine cel mult un element al şirului $\{y_n\}_1^\infty$). Este evident însă că

$$F \subset \bigcup_{z\in F} S(z, \varepsilon_z),$$

adică mulţimea $\{S(z, \varepsilon_z)\}_{z\in F}$formează o acoperire deschisă a mulţimii *F* şi, prin ipoteză există o subacoperire finită. Deci există $\{z_j\}_1^m$, astfel încît $F \subset \bigcup_{j=1}^m S(z_j, \varepsilon_{z_j})$. De aici avem : $\{y_n\}_1^\infty \subset F \subset \bigcup_{j=1}^m S(z_j, \varepsilon_{z_j})$ şi , prin urmare, cel puţin una din sferele $S\left(z_j, \varepsilon_{z_j}\right)$ conţine o infinitate de elemente ale şirului $\{y_n\}_1^\infty$. Aceasta însă contrazice alegerii sferelor $S(z, \varepsilon_z)$ şi deci şirul $\{y_n\}_1^\infty$ conţine cel puţin un subşir convergent. Şirul $\{y_n\}_1^\infty$ fiind un subşir al şirului $\{x_n\}_1^\infty$, rezultă că $\{x_n\}_1^\infty$ conţine un subşir convergent şi, prin urmare, mulţimea *F* este compactă.

§ 19. Funcţii continue pe mulţimi compacte

Fie X şi Y două spaţii metrice şi $f: X \to Y$ o funcţie definită în X cu valori în Y.

Definiţia 1. (Cauchy). Funcţia $f : X \to Y$ se numeşte continuă în punctul $x_0 \in X$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încît $\rho(x, x_0) < \delta$ implică $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Definiţia 2. (Heine). Funcţia $f : X \to Y$ se numeşte continuă în punctul $x_0 \in X$ dacă pentru orice şir $\{x_n\}_1^\infty$ de puncte din X, convergent la x_0, şirul imagine $\{f(x_n)\}_1^\infty$ este convergent la $f(x_0)$.

Aceste două definiţii ale continuităţii unei funcţii într-un punct sînt echivalente. Echivalenţa se stabileşte în mod analog celei din analiza matematică referitor la funcţii numerice de argument numeric.

De obicei se zice, că funcţia f este continuă pe mulţimea $M \subset X$, dacă ea este continuă în orice punct al acestei mulţimi.

În viitor prin $f(M)$ vom nota imaginea mulţimii M prin aplicaţia f, adică $f(M) = \{y \in Y: \exists x \in M,\ f(x) = y\}$.

Pentru funcţiile continue pe mulţimi compacte sînt adevărate un şir de teoreme similare teoremelor Bolsano-Weierstrass şi Cantor, cunoscute din cursul de analiză matematică.

Teorema 1. Imaginea unei mulţimi compacte printr-o aplicaţie continuă este o mulţime compactă.

Demonstraţie. Fie mulţimea $M \subset X$ compactă, $f : X \to Y$ – o funcţie continuă pe M. Vom demonstra că $f(M)$ este de asemenea compactă. Fie $\{y_n\}_1^\infty$ un şir arbitrar din $f(M)$. Întrucît $\{y_n\}_1^\infty \subset f(M)$, există $\{x_n\}_1^\infty \subset M$, astfel încît $f(x_n) = y_n$. Prin ipoteză, M este o mulţime compactă şi deci şirul $\{x_n\}_1^\infty$ conţine un subşir convergent $\{x_{n_k}\}_1^\infty$, $x_{n_k} \to x_0 \in$ $\in M$. Deoarece f este continuă pe M, avem: $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, adică $y_{n_k} \to y_0 = f(x_0) \in f(M)$. Întrucît $\{y_{n_k}\}_1^\infty$ este un subşir al şirului $\{y_n\}_1^\infty$, mulţimea $f(M)$ este compactă.

Consecinţă. Imaginea unei mulţimi compacte printr-o aplicaţie continuă este o mulţime mărginită şi închisă.

Observaţie. Imaginea unei mulţimi relativ compacte printr-o aplicaţie continuă poate să nu fie relativ compactă. De exemplu, fie $X = (0, 1]$ şi $f : X \to Y = R$ definită prin formula $f(x) = \frac{1}{x}$. Funcţia f este continuă pe mulţimea relativ compactă X. Însă imaginea $f(X) = [1, \infty)$ nu este relativ compactă.

Teorema 2. Fie M o mulţime compactă din spaţiul metric X şi $f : M \to R$ o funcţie continuă pe M. Atunci:

a) f este mărginită pe M;
b) dacă

$$\alpha = \inf_{x \in M} f(x), \qquad \beta = \sup_{x \in M} f(x),$$

atunci există $x_0, \widetilde{x_0} \in M$ astfel încît $f(x_0) = \alpha, f(\widetilde{x_0}) = \beta$.

Demonstraţie. Afirmaţia a) rezultă din consecinţă. Să demonstrăm afirmaţia b). Conform definiţiei marginii inferioare, pentru orice număr natural n există $x_n \in M$, astfel încît

$$\alpha \leq f(x_n) < \alpha + \frac{1}{n}, \qquad n \in N.$$

De aici obţinem că $f(x_n) \to \alpha$ şi deci $\alpha \in \overline{f(M)}$. Însă mulţimea $f(M)$ este închisă şi prin urmare $\alpha \in f(M)$, adică există $x_0 \in M$, astfel încît $f(x_0) = \alpha$. În mod analog se demonstrează existenţa punctului $\widetilde{x_0}$.

Definiţia 2. Fie X şi Y două spaţii metrice oarecare şi $M \subset X$. Funcţia $f : M \to Y$ se numeşte uniform continuă pe mulţimea M, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta > 0$, astfel încît relaţiile $x', x'' \in M$, $\rho(x', x'') < \delta$ implică $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.

Teorema 3. Orice funcţie continuă pe o mulţime compactă este uniform continuă pe această mulţime.

Demonstraţie. Fie $M -$ o mulţime compactă în spaţiul metric X şi $f : M \to Y$ $-$o funcţie continuă pe mulţimea M. Admitem că f nu este uniform continuă pe M. Există atunci $\varepsilon_0 > 0$, astfel încît pentru orice $\delta > 0$ există $x', x' \in M$ cu proprietăţile $\rho(x', x'') < \delta$, $\rho(f(x'), f(x'')) \geq \varepsilon_0$.

Fie $\delta_n > 0$ (n = l, 2, ...) un şir convergent la zero. Pentru orice δ_n există $x'_n, x''_n \in M$, astfel încît $\rho(x'_n, x''_n) < \delta_n$, $\rho(f(x'_n), f(x''_n)) \geq \varepsilon_0$. Şirul $\{x'_n\}_1^\infty$ conţine un subşir $\{x'_{n_k}\}_1^\infty$ convergent la $x_0 \in M$ (mulţimea M este compactă !). Din relaţiile

$$0 \leq \rho\left(x''_{n_k}, x_0\right) \leq \rho\left(x''_{n_k}, x'_{n_k}\right) + \rho\left(x'_{n_k}, x_0\right) < \delta_{n_k} + \rho\left(x'_{n_k}, x_0\right)$$

rezultă că $x''_{n_k} \to x_0$ $(k \to \infty)$. Funcţia f este continuă pe M şi deci $f\left(x'_{n_k}\right) \to$

$\to f(x_0), f(x''_{n_k}) \to f(x_0)$ $(k \to \infty)$. De aici şi din continuitatea distanţei avem:

$$\lim_{k\to\infty} \rho\left(f\left(x'_{n_k}\right), f(x''_{n_k})\right) = \rho(f(x_0), f(x_0)) = 0,$$

ceea ce este în contradicție cu inegalitatea

$$\rho(f(x'_n), f(x''_n)) \geq \varepsilon_0 \qquad (k = 1, 2, ...).$$

Teorema este demonstrată.

II. SPAȚII LINIARE NORMATE

§ 20. Spaţii liniare normate. Definiţii. Exemple

O bună parte din materia acestui paragraf în principiu este cunoscută din cadrul algebrei liniare, precum şi din cadrul analizei matematice. Noi, însă, avînd în vedere importanţa acestei materii pentru studiul de mai departe al analizei funcţionale, în mod conştient am găsit de cuviinţă să amintim şi pe alocuri întru-cîtva să completăm aici unele noţiuni deja cunoscute.

Vom nota prin K cîmpul numerelor reale R sau ale celor complexe C.

Definiţia 1. Se numeşte spaţiu liniar (sau spaţiu vectorial) peste cîmpul K o mulţime E de elemente, în care sînt definite două operaţii , şi anume, o operaţie de adunare $x + y$ a elementelor din E (adică o aplicaţie a mulţimii $E \times E$ în E) şi o operaţie αx de înmulţire cu numere $\alpha \in K$ a elementelor $x \in E$ (adică o aplicaţie a mulţimii $K \times E$ în E), care pentru orice $x, y, z \in E$ şi $\alpha, \beta \in K$ satisfac condiţiile:

1) $x + y = y + x$;
2) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3) există un element $0 \in E$ (numit element nul) astfel încît $x + 0 = x$ oricare ar fi $x \in E$;
4) pentru orice element $x \in E$ există un element $(-x) \in E$, astfel încît $x + (-x) = 0$;
5) $1 \cdot x = x$;
6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Aceste condiţii se numesc axiome ale spaţiului liniar. În cazul , cînd $K = R$ spaţiul E se numeşte spaţiu liniar real, iar în cazul $K = C$ E se numeşte spaţiu liniar complex. Elementele spaţiului liniar se numesc vectori.

Proprietăţile l)-8) implică următoarele:

a) elementul 0 din proprietatea 3) este unic;
b) elementul $(-x)$ din proprietatea 4) este unic;
c) $0 \cdot x = 0$ pentru orice $x \in E$;
d) $(-1)x = -x$ pentru orice $x \in E$;
e) $\alpha \cdot 0 = 0$ pentru orice $\alpha \in K$.

Exemple.

1. Mulţimea R^m a sistemelor de m numere reale cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari definite prin formulele:

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_m + \eta_m), \qquad \alpha x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \dots, \alpha\xi_m)$$

$$\left(x = (\xi_j)_1^m, y = (\eta_j)_1^m \in R^m, \alpha \in R\right)$$

formează un spaţiu liniar (real). Cele 8 condiţii din definiţia spaţiului liniar se verifică nemijlocit.

2. În C^m operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari din cîmpul $K = C$ se definesc ca şi în R^m , adică

$$x + y = (\xi_j + \eta_j)_1^m, \qquad \alpha x = (\alpha\xi_j)_1^m$$

$$\left(x = (\xi_j)_1^m, y = (\eta_j)_1^m \in C^m, \alpha \in C\right)$$

Cu aceste operaţii C^m este un spaţiu liniar (complex).

3. Fie $E = l_p$ $(l \leq p < \infty)$ sau l_∞ sau c_0 (vezi definiţiile mulţimilor l_p $(l \leq p < \infty)$, l_∞ , c_0 în §l , 3). Dacă $x = (\xi_j)_1^\infty, y = (\eta_j)_1^\infty \in E, \alpha \in K,$ vom pune

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_n + \eta_n, \dots), \qquad \alpha x = (\alpha\xi_1, \dots, \alpha\xi_n, \dots).$$

Cu aceste operaţii mulţimile l_p $(l \leq p < \infty)$, l_∞ şi c_0 se organizează ca spaţii liniare.

4. Mulţimea $C[a, b]$ a funcţiilor continue pe segmentul $[a, b]$ cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalarii din cîmpul $K=R$, definite prin formulele $(x + y)(t) = x(t) + y(t)$, $(\alpha x)(t) = \alpha x(t)$, formează un spaţiu liniar.

Definiţia 2. Sistemul de vectori $\{x_j\}_1^m$ din spatiul liniar E se zice că este liniar independent, dacă

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j = 0$$

atunci şi numai atunci, cînd $\alpha_j = 0$ $(j = 1, 2, \dots, m)$.

În caz contrar sistemul $\{x_j\}_1^m$ se numeşte liniar dependent. Se zice că sistemul $\{x_j\}_1^\infty$ este liniar independent, dacă orice subsistem $\{x_j\}_1^m$ finit al acestui sistem este liniar independent.

Definiţia 3. Dacă în spaţiul liniar *E* există *m* ($m \in N$) vectori liniar independenţi şi oricare $m + 1$ vectori sînt liniar dependenţi, atunci se spune că *E* este spaţiu liniar m-dimensional şi se scrie $dim\, E = m$.

Definiţia 4. Dacă în spaţiul liniar *E* pentru orice $m \in N$ există *m* vectori liniar independenţi, atunci se spune că *E* este un spaţiu liniar infinit dimensional şi se scrie $dim\, E = \infty$.

Se vede uşor, că spaţiile R^m şi C^m sînt finit dimensionale: $dim\, R^m = m = dim\, C^m$, iar spaţiile l_p ($l \leq p \leq \infty$), c_0 şi $C[a, b]$ – infinit dimensionale. În spaţiile l_p şi c_0 liniar independent este sistemul $\{e_n\}_1^\infty$: $e_n = (\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{n}, 0, \dots)$

iar în $C[a, b]$ – sistemul $\{t^n\}_0^\infty$

Dacă $x_j \in E$, $\alpha_j \in K$ ($j = 1, 2, \dots, m$), atunci elementul

$$x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j$$

se numeşte combinaţie liniară de elemente x_j.

Definiţia 5. Fie *E* un spaţiu liniar. Sistemul $\{x_j\}_1^m$ se numeşte bază a acestui spaţiu, dacă orice $x \in E$ poate fi reprezentat sub formă de combinaţie liniară a vectorilor x_j

$$x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j$$

şi această reprezentare este unică.

Dacă spaţiul liniar este finit dimensional şi *dim E* = *m*, atunci, evident , orice sistem liniar independent din *m* vectori formează o bază. Orice bază a acestui spaţiu este formată din *m* vectori.

Definiţia 6. **S**e zice că în spaţiul liniar *E* este definită o normă, dacă fiecărui vector $x \in E$ îi este pus în corespondenţă un număr real $\|x\|$, asfel încît sînt satisfăcute condiţiile (axiomele normei):

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$, dacă şi numai dacă $x = 0$;
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ $(x \in E, \alpha \in K)$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $(x, y \in E)$ (inegalitatea triunghiului).

Un spaţiu liniar *E*, în care este definită o normă, se numeşte spaţiu liniar normat, sau mai simplu , spaţiu normat si se noteza $\mathfrak{N}$.

Un spaţiu normat devine spaţiu metric, dacă definim distanţa dintre două elemente prin formula $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Faptul că formula aceasta defineşte o distanţă se verifică în mod direct. De aici rezultă, că spaţiul normat este un caz particular al spaţiului metric şi, prin urmare, în acest spaţiu au sens toate definiţiile şi sînt adevărate toate propoziţiile demonstrate pentru spaţiile metrice. În particular, în spaţiul normat $\mathfrak{N}$ sfera cu centrul în x_0 şi de rază $r > 0$ este mulţimea

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathfrak{N}: \|x - x_0\| < r\},$$

iar sfera închisă $-$ mulţimea

$$\bar{S}(x_0, r) = \{x \in \mathfrak{N}: \|x - x_0\| \leq r\}.$$

Şirul $\{x_n\}_1^\infty \subset \mathfrak{N}$ se zice convergent către *x*, dacă

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0,$$

sau echivalent: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in N$, astfel încît $\|x_n - x\| < \varepsilon$ $(n \geq n_0)$. Se scrie

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

sau $x_n \to x$.

Convergenţa definită astfel se numeşte convergenţă în normă.

Şirul $\{x_n\}_1^\infty \subset \mathfrak{N}$ se numeşte şir fundamental, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in N$, astfel încît $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ $(n, m \geq n_0)$.

Dacă un spaţiu liniar normat este complet în sensul convergenţei în normă, atunci el se numeşte spaţiu Banach. Cu alte cuvinte, spaţiul liniar normat în care orice şir fundamental este convergent se numeşte spaţiu Banach. Spaţiul Banach se va nota de obicei prin $\mathfrak{B}$.

Exemple:

1. Spaţiul liniar R^m (respectiv C^m) este un spaţiu normat cu norma

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Axiomele normei 1) $-$2) se verifică direct, iar axioma 3) rezultă imediat din inegalitatea Minkowski (§2). Conform §8, spaţiul R^m (respectiv C^m) este spaţiu Banach.

2. Spaţiul liniar l_p $(l \leq p < \infty)$ cu norma

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

este un spaţiu normat. Aici iarăşi inegalitatea triunghiului coincide cu inegalitatea Minkowski pentru serii. Acest spaţiu este complet şi deci l_p $(l \leq p < \infty)$ este un spaţiu Banach.

3. Spaţiul liniar l_∞ este un spaţiu Banach cu norma

$$\|x\| = \sup_j |\xi_j|.$$

Axiomele normei se verifică în mod direct; pe cît priveşte completitudinea spaţiului l_∞ , menţionăm că ea a fost stabilită în §8.

4. Spaţiul liniar c_0 este un spaţiu Banach cu norma

$$\|x\| = \max_j |\xi_j|.$$

5. Spaţiul $C[a, b]$ este un spaţiu Banach cu norma

$$\|x\| = \max_{0 \le t \le b} |x(t)|.$$

6. Spaţiul $C_p[a, b]$ $(l \le p < \infty)$ este un spaţiu liniar normat cu norma

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Axioma a treia a normei coincide cu inegalitatea Minkowski stabilită în §2 pentru funcţiile continue pe $[a, b]$, axioma a doua este evidentă. Pentru a demonstra că este satisfăcută şi prima axiomă a normei este necesară următoarea:

Lemă. Fie φ o funcţie nenegativă şi continuă pe $[a, b]$. Dacă

$$\int_a^b \varphi(t) dt = 0,$$

atunci $\varphi(t) = 0$.

Demonstraţia acestei leme se bazează pe proprietăţile funcţiilor continue, precum şi a integralelor definite şi e lăsată pe seama cititorului.

Conform §8 , spaţiul normat $C_p[a, b]$ nu este complet şi deci nu este spaţiu Banach.

În continuare menţionăm doar cîteva proprietăţi dintre cele mai simple ale normei, precum şi ale convergenţei într-un spaţiu normat.

Fie $\mathfrak{R}$ un spaţiu normat oarecare. Avem

1. $\|-x\| = \|x\|$ pentru orice $x \in \mathfrak{R}$.

Într-adevăr $\|-x\| = \|(-1)x\| = |-1| \cdot \|x\| = \|x\|$.

2. $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Într-adevăr, $\|x - y\| = \|x + (-1)y\| \leq \|x\| + \|-y\| = \|x\| + \|y\|$.

3. $\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\| \ \leq \ |\alpha_1|\|x_1\| + |\alpha_2|\|x_2\|$.

Într-adevăr, $\|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\| \leq \|\alpha_1 x_1\| + \|\alpha_2 x_2\| = |\alpha_1|\|x_1\| + |\alpha_2|\|x_2\|$.

Utilizînd metoda inducţiei matematice, obţinem

$$\left\|\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| \cdot \|x_j\|.$$

4 $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \ \leq \|x - y\|$. (1)

Avem

$\|x\| = \|y + (x - y)\| \leq \|y\| + \|x - y\|$

$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ (2)

Schimbînd cu locurile x şi y, obţinem

$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$. (3)

Din (2) şi (3) rezultă (1).

5. Norma în orice spaţiu normat este o funcţie continuă, adică $x_n \to x$ implică $\|x_n\| \to \|x\|$.

Această afirmaţie rezultă imediat din inegalitatea $\big|\, \|x_n\| - \|x\| \,\big| \ \leq \|x_n - x\|$, care se obţine nemijlocit din inegalitatea (1) pentru $x = x_n$ şi $y = x$.

6. Operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari într-un spaţiu normat sînt continue , adică dacă

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y \text{ (în } \mathfrak{N} \text{) și } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \text{ (în } K),$$

atunci

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y, \qquad \lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = \alpha x.$$

Într-adevăr,

$$\|(x_n + y_n) - (x - y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \le \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$$

şi

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| = \|(\alpha_n x_n - \alpha_n x) + (\alpha_n x - \alpha x)\| \le |\alpha_n| \cdot \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \cdot \|x\|. \quad (4)$$

Şirul numeric $\{\alpha_n\}_1^\infty$ fiind convergent, este mărginit şi deci există $c > 0$, astfel încât $|\alpha_n| \le c$ ($n \in N$). Din (4) avem

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \le c \cdot \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha| \cdot \|x\| \to 0.$$

Conform definiţiei, o mulţime este mărginită în spaţiul metric, dacă ea se conţine într-o sferă. În cazul unui spaţiu normat drept centrul sferei e comod să se ia vectorul 0 şi obţinem : mulţimea M din spaţiul normat $\mathfrak{N}$ este mărginită în acest spaţiu, dacă există un număr $\alpha > 0$, astfel încît $\|x\| \le \alpha$ ($x \in M$).

De aici şi din 5 rezultă

7. Orice şir convergent este mărginit.

§ 21. Subspaţii. Sume directe de subspaţii

Definiţia 1. Fie $\mathfrak{N}$ un spaţiu liniar normat. Mulţimea $\mathcal{L} \subset \mathfrak{N}$ se numeşte varietate liniară, dacă pentru orice $x, y \in \mathcal{L}$, $\alpha \in K$ elementele $x + y \in \mathcal{L}$, $\alpha x \in \mathcal{L}$. Varietatea liniară închisă se numeşte subspaţiu al spaţiului normat $\mathfrak{N}$.

Mulţimea $\mathcal{L}$ a tuturor polinoamelor formează, evident, o varietate liniară în $C[a, b]$. Însă $\bar{\mathcal{L}}$ = $C[a, b]$ (a se vedea §6) şi deci $\mathcal{L} \neq \bar{\mathcal{L}}$, adică $\mathcal{L}$ nu este subspaţiu. Mulţimea $M = \{x \in C[a, b]: x(a) = x(b) = 0\}$ formează un subspaţiu al spaţiului $C[a, b]$.

Dacă $M \subset \mathfrak{N}$, atunci mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de elemente din M formează o varietate liniară ce se notează de obicei prin $\mathcal{L}$ (M). Aşadar

$$\mathcal{L}(M) = \left\{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j : n \in N, \alpha_j \in K, x_j \in M\right\}.$$

Se vede uşor că $\mathcal{L}(M)$ reprezintă cea mai mică (în raport cu operaţia de incluziune) varietate liniară ce conţine mulţimea M. Ea se numeşte varietate liniară generată de mulţimea M, sau acoperire liniară a mulţimii M, sau înveliş liniar al mulţimii M.

Uşor se demonstrează că închiderea oricărei varietăţi liniare este o varietate liniară închisă, adică un subspaţiu. Subspaţiul $\overline{\mathcal{L}(M)}$ se zice că este subspaţiu generat de mulţimea M. $\overline{\mathcal{L}(M)}$ este cel mai mic subspaţiu (în raport cu operaţia de incluziune) ce conţine mulţimea M.

Definiţia 2. Se spune că sistemul de vectori $M \subset \mathfrak{N}$ este complet în spaţiul $\mathfrak{N}$, dacă $\overline{\mathcal{L}(M)} = \mathfrak{N}$.

Deoarece mulţimea tuturor polinoamelor este densă în $C[a, b]$, rezultă că sistemul $\{t^n\}_0^\infty$ este complet în spaţiul $C[a, b]$.

Definiţia 3. Fie $\mathfrak{M}_1$ şi $\mathfrak{M}_2$ - două subspaţii ale spaţiului liniar normat $\mathfrak{N}$. Se zice că spaţiul $\mathfrak{N}$ este suma directă a subspaţiilor $\mathfrak{M}_1$ şi $\mathfrak{M}_2$ şi se scrie $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_1 \dotplus \mathfrak{M}_2$, dacă orice element $x \in \mathfrak{N}$ poate fi reprezentat sub forma

$$x = y + z \quad (y \in \mathfrak{M}_1 , z \in \mathfrak{M}_2) \tag{1}$$

şi această reprezentare este unică.

Unicitatea reprezentării (1) este echivalentă afirmaţiei că $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \{0\}$. Într-adevăr, fie $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \{0\}$ şi $x = y + z$, $x = y_1 + z_1$ ($y, y_1 \in \mathfrak{M}_1$, $z, z_1 \in \mathfrak{M}_2$). Avem $y - y_1 = z_1 - z \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ şi deci $y - y_1 = 0, z_1 - z = 0$, adică $y = y_1, z = z_1$. Prin urmare, reprezentarea (1) este unică.

Fie acum $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \neq \{0\}$ şi $u \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, $u \neq 0$. Dacă $x = y + z$ $(y \in \mathfrak{M}_1$, $z \in \mathfrak{M}_2)$, atunci avem, de asemenea, $x = (y+u) + (z-u)$ $(y + u \in \mathfrak{M}_1$, $z-u \in \mathfrak{M}_2)$. Prin urmare, dacă $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \neq \{0\}$, atunci reprezentarea (1) nu este unică.

Exemplu. Fie $\mathfrak{N} = l_p (l \leq p < \infty)$,

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{x = (\xi_j)_1^\infty \in l_p : \xi_{2j} = 0, \quad j \in N \right\},$$

$$\mathfrak{M}_2 = \left\{x = (\xi_j)_1^\infty \in l_p : \xi_{2j-1} = 0, \quad j \in N \right\}.$$

Se vede uşor că $\mathfrak{M}_1$ şi $\mathfrak{M}_2$ sint subspaţii ale spaţiului l_p şi $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \{0\}$. Întrucît orice $x = (\xi_j)_1^\infty \in l_p$ poate fi reprezentat sub forma $x = y + z$, unde $y =$

$=(\xi_1, 0, \xi_3, \ldots, \xi_{2n-1}, \ldots) \in \mathfrak{M}_1$ şi $z = (0, \xi_2, 0, \xi_4, \ldots, 0, \xi_{2n}, \ldots) \in \mathfrak{M}_2$, rezulta ca spaţiul l_p este suma directă a subspaţiilor $\mathfrak{M}_1$ şi $\mathfrak{M}_2$

§ 22. Serii în spaţii normate

Definiţia 1. Se spune că seria definită de un şir $\{x_n\}_1^\infty$ de elemente ale spaţiului normat $\mathfrak{N}$ este convergentă în $\mathfrak{N}$ şi are drept sumă elementul s, dacă şirul $\{s_n\}_1^\infty$ ale sumelor parţiale

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

converge către s. În acest caz se scrie

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j = s.$$

Dacă şirul $\{s_n\}_1^\infty$ nu este convergent, se spune că seria

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j \qquad (1)$$

este divergentă.

Din egalitatea $x_n = s_n - s_{n-1}$ (n = 2, 3, ...) urmează că termenul general al unei serii convergente tinde la zero.

În teoria seriilor numerice un rol important îi revine criteriului Cauchy de convergenţă. Un asemenea criteriu este adevărat şi în spaţiile Banach.

Teorema 1. Pentru ca seria (1) să fie convergentă în spaţiul Banach $\mathfrak{B}$, este necesar şi suficient să existe, pentru fiecare număr real $\varepsilon > 0$, un număr natural n_0 , astfel încît

$$\left\|\sum_{j=n+1}^{n+p} x_j\right\| < \varepsilon \qquad (2)$$

oricare ar fi $n \geq n_0$ ($n \in N$) şi $p \in N$.

Demonstraţie. Conform definiţiei, seria (1) este convergentă, dacă şi numai dacă este convergent şirul sumelor parţiale $\{s_n\}_1^\infty$. Spaţiul $\mathfrak{B}$ fiind complet, şirul $\{s_n\}_1^\infty$ este convergent, dacă şi numai dacă el este fundamental, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in N$,astfel încît

$$\|s_{n+p} - s_n\| = \left\|\sum_{j=n+1}^{n+p} x_j\right\| < \varepsilon \;\; (n \geq n_0 \,;\, p \in N).$$

Observaţie. Se vede uşor că necesitatea condiţiei (2) pentru convergenţa seriei (1) este adevărată în orice spaţiu normat (nu neapărat complet). Dacă spaţiul normat $\mathfrak{N}$ nu este complet, atunci fără dificultate se poate construi o serie ce satisface condiţia (2), dar care însă este divergentă.

Definiţia 2. Seria (1) se numeşte absolut convergentă dacă este convergentă seria numerică

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\| \qquad (3)$$

Teorema 2. Spaţiul liniar normat $\mathfrak{N}$ este complet, dacă şi numai dacă în acest spaţiu orice serie absolut convergentă este convergentă.

Demonstraţie. Necesitatea. Fie $\mathfrak{B}$ un spaţiu Banach şi seria

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j \;\left(x_j \in \mathfrak{B}\right)$$

absolut convergentă, adică converge seria (3). Conform criteriului Cauchy pentru seriile numerice avem: pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in N$, astfel încît

$$\sum_{j=n+1}^{n+p}\|x_j\| < \varepsilon \;(n \geq n_0; p \in N).$$

De aici obţinem

$$\left\|\sum_{j=n+1}^{n+p} x_j\right\| \leq \sum_{j=n+1}^{n+p}\|x_j\| < \varepsilon \quad (n \geq n_0;\; p \in N),$$

ceea ce, în virtutea teoremei 1, implică convergenţa seriei (1).

Suficienţa. Fie $\mathfrak{N}$ un spaţiu liniar normat în care orice serie absolut convergentă este convergentă. Vom demonstra că $\mathfrak{N}$ este complet. Fie $\{x_n\}_1^{\infty}$ un șir fundamental în $\mathfrak{N}$. Conform consecinţei din teorema 2 §7, din $\{x_n\}_1^{\infty}$ putem extrage un subșir $\left\{x_{n_j}\right\}_1^{\infty}$ astfel încît seria

$$\|x_{n_1}\| + \sum_{j=1}^{\infty}\left\|x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\right\|$$

este convergentă. Prin urmare , seria

$$x_{n_1} + \sum_{j=1}^{\infty} x_{n_{j+1}} - x_{n_j}$$

este absolut convergentă. Conform ipotezei ultima serie este convergentă și deci este convergent șirul sumelor parțiale $\{s_j\}_1^\infty$ ale ei. Însă

$$s_j = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{j-1}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_j}.$$

Astfel am obținut, că șirul fundamental $\{x_n\}_1^\infty$ conține un subșir $\{x_{n_j}\}_1^\infty$ convergent, ceea ce conform teoremei 3 **§**7 arată, că șirul $\{x_n\}_1^\infty$ este convergent. Prin urmare , orice șir fundamental în $\mathfrak{N}$ este convergentsi și deci spațiul $\mathfrak{N}$ este complet.

§ 23. Spaţii Banach cu bază

Definiţie. Fie $\mathfrak{B}$ un spaţiu Banach infinit dimensional. Se zice că şirul $\{x_n\}_1^\infty$ este o bază (sau baza Schauder) a acestui spaţiu, dacă orice element $x \in \mathfrak{B}$ poate fi reprezentat sub forma

$$x = \sum_{j=1}^\infty \xi_j x_j \ \left(\xi_j \in K\ ;\ j \in N\right) \qquad (1)$$

şi această reprezentare este unică.

Se vede uşor că unicitatea reprezentării oricărui $x \in \mathfrak{B}$ sub forma (1) este echivalentă afirmaţiei:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_j x_j = 0$$

dacă şi numai dacă $\xi_j = 0$ ($j \in N$). De aici, în particular, rezultă că $x_n \neq 0$ ($n \in N$).

Exemple. Fie $\mathfrak{B} = l_p$ ($l \leq$ p $< \infty$) şi $e_n = \left(\underbrace{0,\dots 0,1}_{n}, 0, \dots\right)$. Pentru orice $x = \{\xi_j\}_1^\infty \in l_p$ seria

$$\sum_{j=1}^\infty \left|\xi_j\right|^p$$

converge şi deci restul acestei serii

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^p \to 0 \quad (n \to \infty).$$

De aici rezultă că

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \right\| = \|(0, \dots 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}; \dots)\| = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\xi_j\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

şi deci

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j.$$

Dacă

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j e_j = 0,$$

atunci $(\xi_1, \xi_2, \dots) = 0$, de unde $\xi_j = 0$ ($j \in N$). Prin urmare, şirul $\{e_n\}_1^\infty$ formează o bază a spaţiului l_p ($l \leq p < \infty$). În mod analog se stabileşte că acelaşi sistem $\{e_n\}_1^\infty$ formează o bază a spaţiului c_0.

Teoremă. Orice spaţiu Banach cu bază este separabil.

Demonstraţie. Vom considera cazul spaţiului real. Fie $\{x_j\}_1^\infty$ o bază a spaţiului $\mathfrak{B}$, iar M –mulţimea tuturor combinaţiilor liniare de elemente x_j cu coeficienţi raţionali. Vom demonstra că M este o mulţime numărabilă şi peste tot densă în $\mathfrak{B}$, ceea ce implică separabilitatea spaţiului $\mathfrak{B}$. Pentru orice $n \in N$ notăm prin M_n mulţimile combinaţiilor liniare de elemente $\{x_j\}_1^n$ cu coeficienţi raţionali, adică

$$M_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} r_j x_j : r_j \in Q, j = 1,2, \dots n \right\}.$$

Evident, aplicația

$$\varphi: \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \to (r_1, \dots, r_n)$$

este o bijecție a mulțimii M_n pe mulţimea $\widetilde{M_n}$ a sistemelor din n numere raţionale. Întrucît $\widetilde{M_n}$ este numărabilă, numărabilă va fi şi mulţimea M_n. Însă

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$$

şi deci M este de asemenea numărabilă.

Fie $x \in \mathfrak{B}$,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j x_j.$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$ alegem $n_0 \in N$ astfel ca

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n_0} \xi_j x_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Avînd numărul n_0, alegem numerele $r_j \in Q$ ($j = 1, 2, \dots, n_0$) astfel ca

$$|\xi_j - r_j| < \frac{\varepsilon}{2n_0 \|x_j\|} \quad (j = 1, 2, \dots, n_0). \qquad (3)$$

Considerăm vectorul $y = \sum_{j=1}^{n_0} r_j \, x_j$.

Evident, $y \in M$. Din (2) – (3) avem

$\|x-y\| = \left\|\left(x-\sum_{j=1}^{n_0}\xi_j x_j\right)+\sum_{j=1}^{n_0}(\xi_j - r_j)x_j\right\| \leq \ \left\|x -\right.$

$\left.-\sum_{j=1}^{n_0}\xi_j x_j\right\| + \quad \sum_{j=1}^{n_0} |\, \xi_j - r_j \,| \, \|x_j\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j=1}^{n_0}\frac{\varepsilon}{2n_0\|x_j\|}\|x_j\| \quad =$

$= \ \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Prin urmare, mulţimea M este peste tot densă. Fiind şi numarabila, spatiul $\mathfrak{B}$ este separabil.

Din acastă teoremă rezultă , că orice spaţiu Banach neseparabil (în particular, l_∞) nu admite o bază Schauder .

Afirmaţia reciprocă teoremei , demonstrate mai sus, nu este adevărată. În anul 1972, P.Enflo a arătat că există spaţii Banach separabile care nu admit bază Schauder.

§ 24. Spaţii cît

Fie E un spaţiu liniar peste cîmpul K şi $\mathcal{L}$ o varietate liniară în E. Vom defini în mulţimea E următoarea relaţie: $x \sim y$ dacă $x - y \in \mathcal{L}$. Se verifică uşor că relaţia ~ posedă proprietăţile:

a) $x \sim x$, adică relaţia ~ este reflexivă;
b) $x \sim y$ implică $y \sim x$, adică relaţia ~ este simetrică;
c) $x \sim y$, $y \sim z$ implică $x \sim z$, adică relaţia ~ este tranzitivă.

Prin urmare relaţia ~ este o relaţie de echivalentă şi deci spaţiul E se descompune în clase de echivalenţă în modul următor: două elemente x şi x_1 aparţin aceleiaşi clase, dacă şi numai dacă $x \sim x_1$, adică $x - x_1 \in \mathcal{L}$. Vom nota prin $\hat{x}$ clasa de echivalenţă care conţine elementul x. Se vede uşor că, dacă x este un element din $\hat{x}$, atunci

$$\hat{x} = \{x + x_0, x_0 \in \ \mathcal{L}\}.$$

Se scrie $\hat{x} = x + \mathcal{L}$.

Două clase de echivalenţă sau sînt disjuncte, sau coincid. În adevăr, dacă $u \in \hat{x},\ u \in \hat{y}$, atunci

$$\hat{x} = \{u + x_0, x_0 \in \mathcal{L}\},\ \ \hat{y} = \{u + x_0, x_0 \in \mathcal{L}\}$$

şi deci $\hat{x} = \hat{y}$. Să observam că dacă $x \sim x_1$, $y \sim y_1$, atunci $x + y \sim x_1 + y_1$, $\lambda x \sim \lambda x_1$ ($\lambda \in K$). Într-adevăr:

$(x + y) - (x_1 + y_1) = (x - x_1) + (y - y_1) \in \mathcal{L},\ \ \lambda x - \lambda x_1 = \lambda(x - x_1) \in \mathcal{L}.$

Prin urmare $x \sim x_1$, $y \sim y_1$ implică

$$\widehat{x + y} = \widehat{x_1 + y_1},\qquad \widehat{\lambda x} = \widehat{\lambda x_1} \qquad (1)$$

Acest fapt ne permite să introducem în mulţimea claselor de echivalenţă operaţiile de adunare şi de înmulţire cu un număr în mod natural :

$$\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x + y},\ \lambda\hat{x} = \widehat{\lambda x} \qquad (x \in \hat{x}, y \in \hat{y}, \lambda \in K). \qquad (2)$$

Relaţiile (1) arată că definiţia adunării şi înmulţirii cu un număr din K prin egalităţile (2) este corectă, deoarece clasele $\hat{x} + \hat{y}, \lambda\hat{x}$ nu depind de alegerea elementelor. $x \in \hat{x},\ y \in \hat{y}$.

Se verifică fără dificultate, că mulţimea claselor de echivalenţă cu operaţiile de adunare şi înmulţire definite de relaţiile (2), formează un spaţiu liniar, numit spaţiu cît al lui E prin $\mathcal{L}$ (sau spaţiu cît al lui E relativ la $\mathcal{L}$) şi se notează $E \mid \mathcal{L}$. Rolul elementului nul în acest spaţiu îl joacă clasa ce conţine elementul $0 \in E$:

$$\hat{0} = \{0 + x_0, x_0 \in \mathcal{L}\} = \mathcal{L},$$

iar $-\hat{x} = (-1)\hat{x}$. Într-adevăr,

$$\hat{x} + \hat{0} = \widehat{x + 0} = \hat{x},\qquad \hat{x} + (-1)\hat{x} = \widehat{x + (-x)} = \hat{0}.$$

Dacă spaţiul E este normat, atunci în spaţiul cît poate fi definită o normă.

Este adevărată

Teorema 1. Fie $\mathfrak{N}$ un spaţiu liniar normat, $\mathcal{L}$ un subspaţiu al lui $\mathfrak{N}$ .Formula

$$\|\hat{x}\| = \inf_{x\in\hat{x}}\|x\| \left(= \inf_{x_0\in\mathcal{L}}\|x+x_0\|\,, x\in\hat{x}\right)$$

defineşte o normă în $\mathfrak{N}\,\big|\,\mathcal{L}$.

Demonstraţie. Să observăm că mulţimea $\hat{x}$ este închisă în $\mathfrak{N}$. Într-adevăr, dacă $x_n \in \hat{x}\,, x_n \to u$, atunci

$$\lim_{m\to\infty}(x_n - x_m) = x_n - u,\ \ x_n - x_m \in \mathcal{L}$$

şi deci $x_n - u \in \mathcal{L}$, de unde rezultă $u = x_n - (x_n - u) \in \hat{x}$ **.**

Să verificăm axiomele normei.

l) Dacă $\hat{x} = \hat{0}$, atunci

$$\|\hat{x}\| = \inf_{x\in\hat{\hat{x}}}\|x\| \le \|0\| = 0.$$

Reciproc, fie $\|\hat{x}\| = 0$. Conform definiţiei marginii inferioare, există $x_n \in \hat{x}$, astfel încît $\|\hat{x}\| < 0 + \frac{1}{n}$ (n = 1, 2, ...) şi deci $x_n \to 0$. Însă atunci $0 \in \hat{x}$, ceea ce implică $\hat{x} = \hat{0}$.

2) $\|\lambda\hat{x}\| = \left\|\widehat{\lambda x}\right\| = \inf_{z\in\widehat{\lambda\hat{x}}}\|z\| = \inf_{x_0\in\mathcal{L}}\|\lambda x + x_0\| = \inf_{u\in\mathcal{L}}\|\lambda x + \lambda u\| = |\lambda|\inf_{u\in\mathcal{L}}\|x+u\|$
$= |\lambda|\|\hat{x}\|$.

3) Fie $\hat{x},\hat{y} \in E\,\big|\,\mathcal{L}$ şi $\varepsilon > 0$. Alegem $x \in \hat{x}\,, y \in \hat{y}$, astfel încît $\|x\| < \|\hat{x}\| + \varepsilon$ $\|y\| <$
$< \|\hat{y}\| + \varepsilon$. Avem

$$\|\hat{x}+\hat{y}\| = \|\widehat{x+y}\| = \inf_{z\in\widehat{x+y}}\|z\| \le \|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \le \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\| + 2\varepsilon.$$

Numărul $\varepsilon > 0$ fiind arbitrar, obţinem

$$\|\hat{x}+\hat{y}\| \le \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|.$$

Teorema 2. Dacă $\mathfrak{B}$ este spaţiu Banach şi $\mathcal{L}$ un subspaţiu al spaţiului $\mathfrak{B}$, atunci, $\mathfrak{B}\,\big|\,\mathcal{L}$ este spaţiu Banach.

Demonstraţie. Fie $\{\hat{x}_n\}_1^\infty$ un şir fundamental în $\mathfrak{B} \,\big|\, \mathcal{L}$. Conform consecinţei din teorema 2 §7, şirul $\{\hat{x}_n\}_1^\infty$ conţine un subşir $\{\hat{x}_{n_k}\}_1^\infty$ astfel încît

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|\hat{x}_{n_{k+1}} - \hat{x}_{n_k}\right\| < \infty.$$

Fie x_{n_1} un element arbitrar din $\hat{x}_{n_1}$. Alegem $x_{n_2} \in \hat{x}_{n_2}$ astfel ca

$$\left\|x_{n_2} - x_{n_1}\right\| < \left\|\hat{x}_{n_2} - \hat{x}_{n_1}\right\| + \frac{1}{2},$$

apoi $x_{n_3} \in \hat{x}_{n_3}$astfel ca

$$\left\|x_{n_3} - x_{n_2}\right\| < \left\|\hat{x}_{n_3} - \hat{x}_{n_2}\right\| + \frac{1}{2^2}.$$

Prelungim acest proces la nesfîrşit şi obţinem şirul $\{x_{n_k}\}_1^\infty \in \mathfrak{B}$, $x_{n_k} \in \hat{x}_{n_k}$ ce satisface condiţia : $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < \left\|\hat{x}_{n_{k+1}} - \hat{x}_{n_k}\right\| + \frac{1}{2^k}$ $\quad (k = 1,2, \ldots)$. Avem

$$\left\|x_{n_1}\right\| + \sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < \left\|x_{n_1}\right\| + \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\hat{x}_{n_{k+1}} - \hat{x}_{n_k}\right\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

Prin urmare, seria

$$x_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \qquad (3)$$

este absolut convergentă. Întrucît spaţiul $\mathfrak{B}$ este complet, seria (3) este convergentă. Fie suma seriei (3) egală cu s. Sumele parţiale $s_j = x_{n_1} + \sum_{k=1}^{j-1} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) = x_{n_j}$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_j} = s$. Însă atunci $\left\|\hat{x}_{n_j} - \hat{s}\right\| = \inf\limits_{z \in \hat{x}_{n_j} - \hat{s}} \|z\| = \inf\limits_{u \in \mathcal{L}} \left\|x_{n_j} - s + u\right\| \leq$

$\leq \left\|x_{n_j} - s\right\| \to 0.$

Prin urmare , şirul fundamental $\{\hat{x}_n\}_1^\infty$ conţine un subşir convergent$\left\{\hat{x}_{n_j}\right\}_1^\infty$. Conform teoremei 3, **§7** şirul $\{\hat{x}_n\}_1^\infty$ este convergent. Cu aceasta, completitudinea spaţiului cît $\mathfrak{B}\big|\mathcal{L}$ este demonstrată.

25. Izomorfismul spaţiilor normate finit dimensionale

Definiţia 1. Fie $\mathfrak{R}_1$ şi $\mathfrak{R}_2$ – două spaţii liniare normate peste acelaşi cîmp K. Se zice că aceste spaţii sînt izomorfe, dacă există o aplicaţie bijectivă f a spaţiului $\mathfrak{R}_1$ pe $\mathfrak{R}_2$, astfel încît:

1) f este liniară, adică păstrează operaţiile algebrice : pentru orice $x, y \in \mathfrak{R}$, $\alpha \in K$ avem $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$;

2) aplicaţiile f şi f^{-1} sînt continue.

Teoremă. Orice spaţiu liniar normat real (complex) finit dimensional de dimensiunea m este izomorf cu spaţiul $R^m(C^m)$.

Demonstraţie. Fie $\mathfrak{R}$ un spaţiu liniar normat real, $dim\, \mathfrak{R} = m$. Fixăm o bază $\{e_j\}_1^m$ a spaţiului $\mathfrak{R}$. Atunci fiecare $x \in \mathfrak{R}$ admite o reprezentare unică

$$x = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j.$$

Considerăm aplicaţia $f : \mathfrak{R} \to R^m$ definită astfel: $x = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \to (\xi_1, \dots, \xi_m) = \bar{x}$,

adică dacă $x = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \in \mathfrak{R}$, atunci

$$f(x) = \bar{x}, \qquad (1)$$

unde $\bar{x} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in R^m$.

Evident, f este o bijecţie a spaţiului $\mathfrak{R}$ pe tot spaţiul R^m. Ea este liniară, deoarece dacă

$$y = \sum_{j=1}^{m} \eta_j e_j,$$

atunci

$$x + y = \sum_{j=1}^{m} (\xi_j + \eta_j) e_j, \qquad \alpha x = \sum_{j=1}^{m} (\alpha \xi_j) e_j$$

și $f(x + y) = \overline{x + y} = (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_m + \eta_m) = (\xi_1, \dots, \xi_m) + (\eta_1, \dots, \eta_m) = \bar{x} + \bar{y} = f(x) + f(y)$, $f(\alpha x) = (\alpha\xi_1, \dots, \alpha\xi_m) = \alpha(\xi_1, \dots, \xi_m) = \alpha\bar{x} = \alpha f(x)$.

Vom demonstra acum, că aplicaţiile f și $f^{-1}: R^m \to \mathfrak{R}$, $f^{-1}(\bar{x}) = x$ sînt continue. Pentru orice $x \in \mathfrak{R}$ avem

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j \right\| \le \sum_{j=1}^{m} |\xi_j| \, \|e_j\| \le \left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \beta \|\bar{x}\| ,$$

adică

$$\|x\| \le \beta \|\bar{x}\|, \qquad (2)$$

unde

$$\beta = \left(\sum_{j=1}^{m} \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

De aici, în particular,

$$\|x-y\| \leq \beta\|\overline{x-y}\| = \beta\|\bar{x}-\bar{y}\|, \qquad (3)$$

$$\|f^{-1}(\bar{x}) - f^{-1}(\bar{y})\| \leq \beta\|\bar{x}-\bar{y}\|$$

ceea ce implică continuitatea aplicației f^{-1}.

Pe suprafața sferei din spațiul R^m

$$\partial S(0,1) = \left\{\bar{x} \in R^m : \|\bar{x}\| = \left(\sum_{j=1}^{m} {\xi_j}^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1\right\}$$

considerăm funcția

$$\varphi(\bar{x}) = \|x\| = \|\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_m e_m\|.$$

Utilizînd inegalitatea (2), obținem

$$|\varphi(\bar{x}) - \varphi(\bar{y})| = \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\| \leq \beta\|\bar{x}-\bar{y}\|,$$

ceea ce implică continuitatea funcţiei φ.

Pentru orice $\bar{x} \in \partial S(0,1)$ avem $x \neq 0$ şi deci $\varphi(\bar{x}) > 0$. Mulţimea $\partial S(0,1)$ este compactă (teorema 2, §15), funcţia φ – continuă pe această mulţime şi deci există $\bar{x}_0 \in \partial S(0,1$, astfel încît

$$\inf_{\|\bar{x}\|=1} \varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}_0) = \alpha > 0.$$

Dacă $\bar{x}$ este un vector arbitrar din R^m diferit de vectorul nul, atunci

$$\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \in \partial S(0,1)$$

şi deci $\alpha \leq \varphi\left(\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right) = \left\|\frac{x}{\|\bar{x}\|}\right\| = \frac{\|x\|}{\|\bar{x}\|}$, de unde rezultă

$$\|\bar{x}\| \leq \frac{1}{\alpha}\|x\| \qquad (4)$$

De aici, în particular, $\|\bar{x}-\bar{y}\| = \|\overline{x-y}\| \leq \frac{1}{\alpha}\|x-y\|$ (5)

sau

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \frac{1}{\alpha}\|x-y\|,$$

ceea ce implică continuitatea funcţiei f.

Cazul spaţiului complex se examinează în mod analog.

Consecinţa 1. Orice două spaţii liniare normate reale (complexe) finit dimensionale de aceeaşi dimensiune sînt izomorfe.

Este suficient să observăm că ambele spaţii sînt izomorfe cu R^m (C^m) şi deci sînt izomorfe între ele.

Definiţia 2. Se spune că două norme $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2$ definite pe un spaţiu liniar E, sînt echivalente, dacă există două numere reale c_1, $c_2 > 0$, asfetfel încît $c_2\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_1\|x\|_1$ oricare ar fi $x \in E$.

Consecinţa 2. Orice două norme, definite pe un spaţiu liniar finit dimensional, sînt echivalente

Într-adevăr, fie $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_2$ două norme definite pe spaţiul liniar E. Utilizind inegalităţile (2) şi (4), obţinem inegalităţile:

$$\alpha_1\|\bar{x}\| \leq \|x\|_1 \leq \beta_1\|\bar{x}\|, \qquad \alpha_2\|\bar{x}\| \leq \|x\|_2 \leq \beta_2\|\bar{x}\|,$$

în care α_j, β_j (j = l, 2) sînt anumite numere pozitive. De aici

$$\frac{\alpha_2}{\beta_1}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \frac{\beta_2}{\alpha_1}\|x\|_1.$$

Consecinţa 3. Convergenţa într-un spaţiu liniar normat finit dimensional este echivalentă cu convergenţa în coordonate.

Într-adevăr, fie $\{e_j\}_1^m$ – o bază a spaţiului normat $\mathfrak{N}$, $x = \sum_{j=1}^m \xi_j e_j$, $x_n = \sum_{j=1}^m \xi_j^{(n)} e_j$. Din (3) şi (5) avem

$$\alpha\|\overline{x_n} - \bar{x}\| \leq \|x_n - x\| \leq \beta\|\overline{x_n} - \bar{x}\|$$

De aici rezultă că şirul $\{x_n\}_1^\infty$ converge în spaţiul $\mathfrak{N}$ către x, dacă și numai dacă șirul $\{\overline{x_n}\}_1^\infty$ $\left(\overline{x_n} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \dots, \xi_m^{(n)})\right)$ converge către $\bar{x} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ în spaţiul R^m (C^m). În spaţiul R^m (C^m) convergenţa este echivalentă cu convergenţa în coordonate şi deci obţinem

$$x_n = \sum_{j=1}^m \xi_j^{(n)} e_j \to x = \sum_{j=1}^m \xi_j e_j,$$

dacă şi numai dacă $\xi_j^{(n)} \to \xi_j$ (j = l, 2, ..., m).

Consecinţa 4. Orice varietate liniară finit dimensională într-un spaţiu normat este închisă şi prin urmare este un subspaţiu.

Fie $\mathcal{L}$ o varietate liniară în spaţiul normat $\mathfrak{N}$, $dim\ \mathcal{L} = m$ şi $\{x_n\}_1^\infty$ un şir din $\mathcal{L}$, convergent în $\mathfrak{N}$ către un element oarecare x. Vom demonstra că $x \in \mathcal{L}$. Fie $\{e_n\}_1^m$ – o bază în $\mathcal{L}$ şi

$$x_n = \sum_{j=1}^m \xi_j^{(n)} e_j.$$

Şirul $\{x_n\}_1^\infty$, fiind convergent, este şi fundamental. Din relaţia (5) avem:

$$\|\bar{x}_k - \bar{x}_n\| \leq \frac{1}{\alpha}\|x_k - x_n\|,$$

de unde rezultă că $\{\bar{x}_n\}_1^\infty$ este fundamental în R^m şi deci convergent. Fie $\bar{x}_n \to \bar{y} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$.

Punem

$$y = \sum_{j=1}^{m} \eta_j e_j.$$

Atunci $y \in \mathcal{L}$ şi

$$\|x_n - y\| \leq \beta \|\bar{x}_n - \bar{y}\| \to 0.$$

Avem: $x_n \to y \in \mathcal{L}$ şi $x_n \to x$. Deci $x = y \in \mathcal{L}$.

§ 26. Compacitatea şi spaţiile finit dimensionale

Scopul acestui paragraf este de a demonstra teorema F. Riesz, privind caracterizarea spaţiilor normate finit dimensionale. În demonstraţie vom utiliza următoarea lemă, care în analiza funcţională are şi multe alte aplicaţii.

Lema Riesz. Fie $\mathcal{L}$ un subspaţiu al spaţiului liniar normat $\mathfrak{R}$, $\mathcal{L} \neq \mathfrak{R}$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un element $x_0 \in \mathfrak{R}$, astfel încît

$$\|x_0\| = 1, \|x_0 - y\| > 1 - \varepsilon \quad (\forall y \in \mathcal{L})$$

Demonstraţie. Fie $x \in \mathfrak{R} \setminus \mathcal{L}$ și $d -$ distanţa de la x la $\mathcal{L}$, adică

$$d = \rho(x, \mathcal{L}) = \inf_{z \in \mathcal{L}} \|x - z\|.$$

Întrucît $\mathcal{L}$ este o mulţime închisă şi $x \notin \mathcal{L}$, numărul $d > 0$. Alegem un element $y_0 \in \mathcal{L}$, astfel ca

$$d \le \|x - y_0\| < d + d\varepsilon \qquad (1)$$

şi notăm

$$x_0 = \frac{x - y_0}{\|x - y_0\|}.$$

Evident, $\|x_0\| = 1$ şi pentru orice $y \in \mathcal{L}$ avem

$$\|x_0 - y\| = \left\|\frac{x - y_0}{\|x - y_0\|} - y\right\| = \frac{\|x - (y_0 + y\|x - y_0\|)\|}{\|x - y_0\|}. \qquad (2)$$

Elementul $z = y_0 + y\|x - y_0\| \in \mathcal{L}$ şi deci $\|x - z\| \ge d$. De aici şi din relaţiile (1) şi (2) rezultă

$$\|x_0 - y\| = \frac{\|x - z\|}{\|x - y_0\|} \ge \frac{d}{\|x - y_0\|} > \frac{d}{d + d\varepsilon} = \frac{1}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon.$$

Teorema Riesz. Spaţiul liniar normat $\mathfrak{N}$ este finit dimensional, dacă şi numai dacă orice mulţime mărginită din $\mathfrak{N}$ este relativ compactă.

Demonstraţie. Vom considera cazul spaţiului real. Fie $\mathfrak{N}$ un spaţiu normat cu $\dim \mathfrak{N} = m < \infty$. Considerăm aplicaţia $f : \mathfrak{N} \to R^m$ definită în paragraful precedent prin formula (1). Conform relaţiilor (2) şi (4) ale aceluiaşi paragraf, avem

$$\frac{1}{\beta}\|x\| \le \|f(x)\| \le \frac{1}{\alpha}\|x\| \qquad (x \in \mathfrak{N}) \qquad (3)$$

Fie M o mulţime mărginită în $\mathfrak{N}$ şi deci există $c > 0,$ astfel încît

$$\|x\| \le c \quad (x \in M). \qquad (4)$$

Din (3) şi (4) rezultă că

$$\|f(x)\| \le \frac{1}{\alpha}\|x\| \le \frac{c}{\alpha} \quad (x \in M).$$

Deci mulţimea $f(M)$ este mărginită în R^m şi prin urmare este relativ compactă (teorema 2, §15).

Dacă $\{x_n\}_1^\infty$ este un şir arbitrar din M, atunci mulţimea $f(M)$ fiind relative compactă, şirul $\{f(x_n)\}_1^\infty$ conţine un subşir convergent $\{f(x_{n_k})\}_1^\infty$. Fie $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = y \in R^m$.

Aplicaţia f este surjectivă şi deci există $x \in \mathfrak{N}$, astfel încît $f(x) = y$. Din (3) rezultă:

$$\|x_{n_k} - x\| \leq \beta\|f(x_{n_k} - x)\| = \beta\|f(x_{n_k}) - f(x)\| = \beta\|f(x_{n_k}) - y\| \to 0.$$

Prin urmare, orice şir $\{x_n\}_1^\infty \subset M$ conţine un subşir convergent şi deci mulţimea M este relativ compactă.

Reciproc. Fie acum $\mathfrak{N}$ un spaţiu liniar normat infinit dimenţional. Vom demonstra că în acest spaţiu există o mulţime mărginită, dar care nu este relativ compactă.

Luăm în $\mathfrak{N}$ un element arbitrar x_1, $\|x_1\| = 1$ şi considerăm varietatea liniară $\mathcal{L}_1$ generată de vectorul x_1: $\mathcal{L}_1 = \{\lambda_1 x_1; \lambda_1 \in R\}$. Evident, $dim\, \mathcal{L}_1 = 1$ şi deci $\mathcal{L}_1 \neq \mathfrak{N}$. Conform lemei Riesz, există $x_2 \in \mathfrak{N}$, $\|x_2\| = 1$,

$$\|x_2 - y\| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ (\forall\, y \in \mathcal{L}_1).$$

În particular, avem $\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}$. Notam prin $\mathcal{L}_2$ varietatea liniară generată de vectorii x_1 şi x_2 , adică: $\mathcal{L}_2 = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2; \lambda_1, \lambda_2 \in R\}$. Este clar că dim $dim\ \mathcal{L}_2 \leq 2$ şi deci $\mathcal{L}_2 \neq \mathfrak{N}$. Conform lemei Riesz există $x_3 \in \mathfrak{N}$, $\|x_3\| = 1$,

$$\|x_3 - y\| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ (\forall\, y \in \mathcal{L}_2).$$

În particular, $\|x_3 - x_1\| > ½$, $\|x_3 - x_2\| > \frac{1}{2}$. Continuăm acest proces la nesfîrşit şi obţinem şirul $\{x_j\}_1^\infty$ cu proprietaţile: $\|x_j\| = 1$ $(j \in N)$, $\|x_j - x_k\| > ½$ $(j \neq k)$.

Conform primei proprietaţi, mulţimea $M = \{x_j\}_1^\infty$ este mărginită. Cea de a doua proprietate arată, că mulţimea $M = \{x_j\}_1^\infty$ nu conţine subşiruri convergente. Prin urmare, mulţimea M este mărginită , insă nu este relativ compactă.

§ 27. Spaţiile $L_p(T, \Sigma, \mu)$ $(1 \le p < \infty)$

Fie (T, Σ, μ) un spaţiu cu măsură, adică T este o mulţime oarecare nevidă , Σ - o σ- algebră cu unitatea T şi μ - o măsură σ - aditivă completă, definită pe Σ. Fie, în continuare, p un număr real $p \ge 1$. O funcţie măsurabilă $x : T \to K$ ($K \in R$ sau $K \in C$) se zice p - integrabilă pe T, dacă funcţia $|x(t)|^p$ este integrabilă Lebesgue pe această mulţime.

Pentru orice $\alpha, \beta \in K$, avem

$$|\alpha+\beta|^p \le (|\alpha|+|\beta|)^p \le (2\max(|\alpha|,|\beta|))^p = 2^p \max(|\alpha|^p,|\beta|^p) \le 2^p(|\alpha|^p + +|\beta|^p).$$

De aici imediat rezultă că suma $x + y$ a două funcţii x, y p - integrabile este o funcţie p - integrabilă. Este evident că, dacă x este p - integrabilă, atunci şi αx este p - integrabilă.

Vom considera mulţimea tuturor funcţiilor p - integrabile $x : T \to K$ şi vom introduce următoarea relaţie de echivalenţă: $x \sim y$ dacă $x(t) = y(t)$ aproape peste tot (a.p.t).

Să notăm cu $Lp(T, \Sigma, \mu)$ mulţimea tuturor claselor de echivalenţă.

Dacă x şi y sînt funcţii aparţinînd la clase diferite $\hat{x}$ şi $\hat{y}$, iar $z(t) = x(t) + y(t)$, atunci z aparţine unei clase $\hat{z}$. Clasa $\hat{z}$ depinde de clasele $\hat{x}$ şi $\hat{y}$ şi nu depinde de reprezentanţii concreţi x şi y din aceste clase. Într-adevăr, dacă x_1 şi y_1 sînt alţi doi reprezentanţi ai claselor $\hat{x}$ şi $\hat{y}$, atunci $x \sim x_1$, $y \sim y_1$, adică $x(t) = x_1(t)$, $y(t) = y_1(t)$ a.p.t. şi deci $x(t) + y(t) = x_1(t) + y_1(t)$ a.p.t., ceea ce implică $x + y \sim x_1 + y_1$.

Prin definiţie punem: clasa $\hat{z}$ este suma claselor $\hat{x}$ şi $\hat{y}$. Dacă $\alpha \in K$ şi $\hat{x}$ este o clasă oarecare de echivalentă, atunci $\alpha\hat{x}$ va fi clasa care conţine elementul αx (prin definiţie)

Cu aceste operaţii, mulţimea $Lp(T, \Sigma, \mu)$ devine un spaţiu liniar. Vom conveni în viitor să notăm cu x clasa $\widehat{x}$ determinată de funcţia x.

Ca şi pentru funcţiile continue se demonstrează:

a) inegalitatea Holder: $1 < p < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $x \in Lp(T, \Sigma, \mu)$, $y \in Lq(T, \Sigma, \mu)$ implică $x\,y \in L_1\,(T, \Sigma, \mu)$ şi

$$\int_T |x(t)y(t)|d\mu \leq \left(\int_T |x(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_T |y(t)|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}};$$

b) inegalitatea Minkowski: $1 \leq p < \infty$, $x, y \in Lp(T, \Sigma, \mu)$ implică

$$\left(\int_T |x(t) + y(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_T |x(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_T |y(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Spaţiul liniar $Lp(T, \Sigma, \mu)$ poate fi organizat ca spaţiu liniar normat, punînd

$$\|x\| = \left(\int_T |x(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proprietăţile normei

a) $\| x \| \geq 0$; $\| x \| = 0$, dacă şi numai dacă $x = 0$,
b) $\| \alpha x \| = | \alpha| \cdot \| x \|$

rezultă din proprietăţile integralei Lebesgue.

Proprietatea a treia a normei (inegalitatea triunghiului) coincide cu inegalitatea Minkowski.

Spaţiul liniar normat $Lp(T, \Sigma, \mu)$ se numeşte spaţiul funcţiilor p - integrabile (sau p - sumabile), deşi elementele lui sînt clase de funcţii.

Convergenţa în normă în spaţiul $Lp(T, \Sigma, \mu)$ se mai numeşte şi convergenţă în medie de ordinul p.

În cazul cînd $T = [a, b]$, iar μ este măsura Lebesque, scriem $L_p[a, b]$.

Teorema 1. Spaţiul $L_p(T, \Sigma, \mu)$ este spaţiu Banach.

Demonstrație. Vom demonstra completitudinea acestui spațiu. Fie $\{x_n\}_1^\infty$ un şir fundamental de elemente ale lui *Lp(T, Σ, μ)* Din consecința teoremei 3, §7 rezultă că putem extrage un subşir astfel încît

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right\|<\infty.$$

Aplicînd inegalitatea Holder, obținem

$$\int_T\left|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)\right|d\mu\leq\left(\int_T\left|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)\right|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_T 1^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\big(\mu(T)\big)^{\frac{1}{q}}\left\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\right\|$$

și deci seria

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_T\left|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)\right|d\mu$$

este convergentă.

De aici și din teorema Levi, privind trecerea la limită sub semnul integrală Lebesque, rezultă că seria

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)\right|$$

converge a.p.t. și deci converge a.p.t. și seria

$$x_{n_1}(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(x_{n_{k+1}}(t)-x_{n_k}(t)\Big).$$

Sumele parțiale ale ultimei serii coincid cu $x_{n_k}(t)$ și , prin urmare, a.p.t. pe T şirul $\left\{x_{n_k}(t)\right\}_1^\infty$ este convergent.

Punem $x(t) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}(t) \text{ în punctele } t\in T, \text{ în care şirul} \\ \{x_{n_k}(t)\}_1^\infty \text{ este convergent;} \\ 0, \text{ în celelalte puncte ale mulţimii } T. \end{cases}$.

Vom demonstra că $x\in$ $Lp(T, \Sigma, \mu)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0.$ Fie $\varepsilon > 0$ şi $n_0 \in N$ un număr, astfel ca pentru orice $n, m \geq n_0$ să avem

$$\|x_n - x_m\|^p = \int_T |x_n(t) - x_m(t)|^p d\mu < \varepsilon^p.$$

Dacă $n, n_k \geq n_0$, atunci

$$\left\|x_n - x_{n_k}\right\|^p = \int_T \left|x_n(t) - x_{n_k}(t)\right|^p d\mu < \varepsilon^p.$$

Deoarece

$$\lim_{k\to\infty}\left|x_n(t) - x_{n_k}(t)\right| = |x_n(t) - x(t)| \quad \text{a.p.t.} ,$$

aplicînd teorema Fatou, obţinem$\int_T |x_n(t) - x(t)|^p d\mu \leq \varepsilon^p \quad (n \geq n_0)$,

adică şi $x_n - x \in Lp(T, \Sigma, \mu)$ şi $\|x_n - x\| \leq \varepsilon$ $(n \geq n_0)$. Însă $x = x_n + (x - x_n)$ şi deci $x \in Lp(T, \Sigma, \mu)$ **,** ceea ce împreună cu relaţia $\|x_n - x\| \leq \varepsilon$ $(n \geq n_0)$ implică: şirul $\{x_n\}_1^\infty$ converge către x în $L_p(T, \Sigma, \mu)$.

Teorema 2. Mulţimea funcţiilor măsurabile şi mărginite este densă în $Lp(T, \Sigma, \mu)$

Demonstraţie. Fie $x \in Lp(T, \Sigma, \mu)$ **,** $\varepsilon > 0$, $A_n = \{t \in T : n - 1 \leq |x(t)| < n\}$.

Avem

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

şi

$$\int_T |x\ (t)|^p d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |x\ (t)|^p d\mu < \infty$$

Deci există $n_0 \in N$ astfel încît

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \int_{A_n} |x\ (t)|^p d\mu < \varepsilon^p \qquad (1)$$

Notăm

$$A = \bigcup_{n=1}^{n_0} A_n\,, \qquad B = \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} A_n.$$

Atunci $T = A \cup B$ şi din (1) avem

$$\int_B |x(t)|^p d\mu < \varepsilon^p.$$

Punem

$$y(t) = \begin{cases} x(t), t \in A \\ 0, \quad t \in B \end{cases}$$

Este evident că funcţia $y(t)$ este măsurabilă, mărginită ($|y(t)| \leq n_0$) şi$\|x - y\| =$ $= \left(\int_T |x(t) - y(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_B |x(t)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$

În cele ce urmează spaţiul *Lp(T, Σ, μ)* se va presupune real.

<u>Teorema 3.</u> Fie T un paralelipiped în R^m, μ - măsura Lebesgue. Mulţimea funcţiilor continue pe T este densă în spaţiul *Lp(T, Σ, μ)*

Demonstraţie. Fie $x \in$ *Lp(T, Σ, μ)* şi ε > 0. Conform teoremei 2, există o funcţie măsurabilă, mărginită y, astfel încît $|y(t)| \leq M$ ($t \in T$) şi

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aplicînd teorema Luzin, obţinem o funcţie continuă $z(t)$ pe T cu proprietăţile:

$$|z(t)| \leq M \ (t \in T), \qquad \mu(B) < \left(\tfrac{\varepsilon}{4M}\right)^p,$$

unde $B = \{t \in T : z(t) \neq y(t)\}$.

Avem

$$\|z-y\|^p = \int_T |z(t)-y(t)|^p d\mu = \int_B |z(t)-y(t)|^p d\mu \leq \int_B (|z(t)| + |y(t)|)^p d\mu$$
$$\leq \int_B (M+M)^p d\mu =$$
$$= (2M)^p \mu(B) < (2M)^p \left(\frac{\varepsilon}{4M}\right)^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p.$$

În consecinţă

$$\|z-y\| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Teorema 4. În spaţiul $L_p[a,b]$ este densă mulţimea P a tuturor polinoamelor cu coeficienţi raţionali.

Demonstraţie. Fie $x \in L_p[a,b], \varepsilon > 0$. Din teorema 3 rezultă existenţa funcţiei continue z cu $\|x-z\| < \frac{\varepsilon}{2}$. În §6 am stabilit că mulţimea P este densă în $C[a, b]$ şi deci există un polinom $r(t) \in P$, astfel încît

$$\max_{a \leq t \leq b} |z(t) - r(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)^{\frac{1}{p}}}.$$

Avem

$$\|z-r\| = \left(\int_a^b |z(t)-r(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b \left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)^{\frac{1}{p}}}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

şi deci $\|x-r\| \leq \|x-z\| + \|z-r\| < \varepsilon$.

Consecinţă. Spaţiul $L_p[a,b]$ $(1 \le p < \infty)$ este separabil.

Teorema 5. În spaţiul $L_p[a,b]$ $(b - a = 2\pi)$ este densă mulţimea polinoamelor trigonometrice

$$a_0 + a_1 cos\, t + b_1 sin\, t + \cdots + a_n cos\, nt + b_n sin\, nt.$$

Demonstraţie. Fie $x \in L_p[a,b]$, $\varepsilon > 0$. Conform teoremei 3, există $z \in C[a, b]$, astfel încît

$$\|x - z\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie $|\, z(t)\, | \le M$ $(a \le t \le b)$ şi $0 < \delta < \left(\frac{\varepsilon}{8M}\right)^p$. Punem

$$v(t) = \begin{cases} z(t), t \in [a+\delta, b], \\ z(b), \qquad t = a, \\ \text{liniară pe } [a, a+\delta]. \end{cases}$$

Evident , funcţia $v(t)$ este continuă, $|\, v(t)| \le M$ $(a \le t \le b)$ şi această funcţie poate fi prelungită prin periodicitate pe toată axa reală. Conform teoremei Weierstrass, există un polinom trigonometric $h(t)$, astfel încît

$$\max_{a \le t \le b} |v(t) - h(\mathrm{t})\,| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)^{\frac{1}{p}}}.$$

Avem

$$\|z - v\| = \left(\int_a^b |z(t) - v(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^{a+\delta} |z(t) - v(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^{a+\delta} (|z(t)| + \right.$$

$$\left. + |v(t)|)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \le 2\, M\, \delta^{\frac{1}{p}} < 2\, M \frac{\varepsilon}{8M} = \frac{\varepsilon}{4} \quad ,$$

$$\|v - h\| = \left(\int_a^b |v(t) - h(\mathrm{t})\,|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4(b-a)^{\frac{1}{p}}} . (b-a)^{\frac{1}{p}} = \frac{\varepsilon}{4}$$

şi deci

$$\|x-h\| \leq \|x-z\| + \|z-v\| + \|v-h\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

§ 28. Spaţiul $L_\infty(T, \Sigma, \mu)$

Fie μ o măsură σ - aditivă completă, definită pe o σ - algebră $\mathbf{\Sigma}$ cu unitatea T. Să considerăm mulţimea tuturor funcţiilor $x : T \to R$ măsurabile şi mărginite a.p.t., adică există o constantă $C_x \geq 0$ astfel încît $| x(t) | \leq C_x$ a.p.t. Vom introduce în această mulţime relaţia de echivalenţă în modul următor: $x \sim y$, dacă $x(t) = y(t)$ a.p.t. Vom nota cu $L_\infty(T, \Sigma, \mu)$ mulţimea tuturor claselor de echivalenţă.

Introducem operaţiile de adunare a două clase şi de înmulţire a unei clase printr-un număr ca şi în $Lp(T, \Sigma, \mu)$

Fie x o funcţie măsurabilă şi mărginită a.p.t. pe T. Se numeşte suprem essenţial sau suprem adevărat al lui $x(t)$ pe T şi se notează prin

$$vrai \sup_{t \in T} x(t)$$

sau

$$ess \sup_{t \in T} x(t),$$

mărimea

$$\inf_{\mu(M)=0} \sup_{t \in T \setminus M} x(t).$$

Aici marginea inferioară se ia în raport cu toate submulţimile de măsură zero.

Teoremă. Multimea $L_\infty(T, \Sigma, \mu)$ formează un spaţiu Banach cu norma

$$\|x\| = ess \sup_{t \in T} |x(t)|.$$

Demonstraţia acestei teoreme se face în mod direct şi de aceea o lăsăm pe seama cititorului. Spre deosebire de spaţiile $L_p[a,b]$, spatiul $L_\infty[a,b]$ nu este separabil. Intr-adevăr,fie

$$x_\alpha(t) = \begin{cases} 1, t\in[a,\alpha] \\ 0, t\in(\alpha,b] \quad (a \le \alpha \le b). \end{cases}$$

Multimea $\{x_\alpha\}_{\alpha\in[a,b]}$ este nenumărabilă şi

$$\rho(x_\alpha, x_\beta) = \|x_\alpha - x_\beta\| = ess \sup_{t\in[a,b]} |x_\alpha(t) - x_\beta(t)| = 1 \quad (\alpha \neq \beta)$$

Este suficient acum să aplicăm teorema 2,§6.

III. **SPATII HILBERT**

§ 29. Spaţii Hilbert. Exemple

Definiţia 1. Fie *E* un spaţiu liniar peste cîmpul *K* (real sau complex). Se zice că pe *E* este definit un produs scalar, dacă fiecărei perechi ordonate de elemente x, $y \in E$ îi este pus în corespondenţă un anumit număr din *K*, ce se notează de regulă prin (x, y), numit produsul scalar al elementelor x şi y, astfel încît pentru orice $x, y, z \in E$, $\lambda \in K$ sînt îndeplinite următoarele condiţii (axiome ale produsului scalar):

1. $(x, x) \ge 0$; $(x, x) = 0$, dacă şi numai dacă $x = 0$;

2. $(\overline{x, y}) = (y, x)$;

3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

4. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.

În cazul spaţiului real ($K \in R$) axioma 2, evident, ia forma $(x, y) = (y , x)$.

Exemple.

1 . În spaţiul R^m produsul scalar poate fi definit prin formula

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \eta_j.$$

Se vede uşor că această formulă într-adevăr defineşte un produs scalar, adică sînt îndeplinite condiţiile 1) −4).

2. În spaţiul C^m produsul scalar îl vom defini în felul următor:

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \bar{\eta}_j \quad \left(x = (\xi_j)_1^m, y = (\eta_j)_1^m\right).$$

4. În spaţiul l_2 produsul scalar îl vom defini prin formula

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\eta}_j \quad \left(x = (\xi_j)_1^{\infty}, \qquad y = (\eta_j)_1^{\infty}\right). \qquad (1)$$

Convergenţa absolută a seriei (1) rezultă din inegalitatea Holder (§2).

5. În spaţiul $\boldsymbol{L_2}$**(T, Σ, μ)** vom defini produsul scalar prin formula

$$(x, y) = \int_T x(t)\overline{y(t)} d\mu. \qquad (2)$$

Existenţa integralei (2) rezultă din inegalitatea Holder (§27). Proprietăţile l)-4) rezultă din proprietăţile integralei Lebesque.

6. În spaţiul $C[a, b]$ definim produsul scalar prin formula

$$(x, y) = \int_a^b x(t) y(t) dt.$$

În continuare menţionăm cîteva din cele mai simple proprietăţi ale produsului scalar ce rezultă direct din definiţie.

a) $(0, x) = (x, 0) = 0$.

Întradevăr, $(0, x) = (0\cdot y, x) = 0\cdot(y, x) = 0$.

b) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$. Avem

$$(x, y+z) = \overline{(y+z, x)} = \overline{(y,x)+(z,x)} = \overline{(y,x)} + \overline{(z,x)} = (x,y) + (x,z).$$

c) $(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda (y,x)} = \bar{\lambda}\,\overline{(y,x)} = \bar{\lambda}\,(x,y)$.

Din b) şi c) imediat rezultă

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_j (x_i, y_j).$$

Teorema 1. Dacă *E* este un spaţiu liniar înzestrat cu un produs scalar, atunci are loc inegalitatea

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} \qquad (3)$$

oricare ar fi x , $y \in E$ numită inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz. În inegalitatea (3) semnul egalităţii are loc , dacă şi numai dacă există $\lambda \in K$ astfel încît $x = \lambda y$ sau $y = \lambda x$.

Demonstraţie. Se vede uşor că dacă $x = \lambda y$ sau $y = \lambda x$,atunci

$$|(x,y)| = \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}.$$

Dacă $y = 0$, atunci relaţia (3) devine o egalitate şi $y = \lambda x$ cu $\lambda = 0$. Fie $y \neq 0$.

Atunci cu $\lambda = \frac{(x,y)}{(y,y)}$ avem

$$0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x,x) - \lambda(y,x) - \bar{\lambda}(x,y) + \lambda\bar{\lambda}(y,y) =$$

$$= (x,x) - \frac{(x,y)}{(y,y)}\overline{(x,y)} - \frac{\overline{(x,y)}}{(y,y)}(x,y) + \frac{(x,y)}{(y,y)}\frac{\overline{(x,y)}}{(y,y)}(y,y) = (x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}$$

sau

$$\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \leq (x,x),$$

ceea ce implică (3). Dacă în 3) are loc semnul egalității, atunci $(x-\lambda y, x-\lambda y)=0$ deci $x-\lambda y=0, x=\lambda y$.

Teorema 2. Dacă (x, y) este un produs scalar, definit într-un spaţiu liniar E , atunci funcţia

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \qquad (4)$$

este o normă în E.

Demonstraţie. Să ne convigem că prin forma (4) se defineşte o normă în E. Avem

1) $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \geq 0$; $\|x\| = 0$ dacă şi numai dacă $(x,x) = 0$ şi deci $x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}(x,x)} = \sqrt{|\lambda|^2(x,x)} = |\lambda|\|x\|$;
3) $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y) = \|x\|^2 + (x,y) + $ $+(\overline{x,y}) + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,Re(x,y) + \|y\|^2$.

Aici prin $Re(x, y)$ am notat, ca de obicei, partea reală a numărului complex (x, y). Evident, $|Re\,(x,y)| \leq \left|(x,y)\right|$. Utilizînd inegalitatea Cauchy- Buniakovski –Schwartz , obţinem

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|Re\,(x,y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2 \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2|\|x\|\|y\|| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

De aici rezultă inegalitatea triunghiului $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Observație. Dacă norma în E este definită de un produs scalar $\|x\| \leq \sqrt{(x,x)}$,

atunci $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, dacă și numai dacă $x = \lambda y$ sau $y = \lambda x$ cu $\lambda \geq 0$.

Într-adevăr, dacă $y = \lambda x$ cu $\lambda \geq 0$ atunci $\|y\| = \lambda\|x\|$ și

$$\|x+y\| = \|x+\lambda x\| = \|(1+\lambda)x\| = (1+\lambda)\|x\| = \|x\| + \lambda\|x\| = \|x\| + \|y\|.$$

Reciproc, fie $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Din demonstratia teoremei 2 rezultă, că în acest caz inegalitatea Cauchy- Buniakovski –Schwartz este o egalitate şi deci $x = \lambda y$ sau $y = \lambda x$. Fie $y = \lambda x$. Avem

$$\|x+y\| = \|x+\lambda x\| = |1+\lambda|\|x\|$$

$$\|x\| + \|y\| = \|x\| + |\lambda|\|x\| = (1+|\lambda|)\|x\|.$$

Pentru $x \neq 0$ de aici obţinem $|1+\lambda| = 1+|\lambda|$, ceea ce implică $\lambda \geq 0$. Dacă însă $x = 0$, atunci şi $y = 0$ şi drept λ se poate lua orice număr nenegativ.

Definiţia 2. Se numeşte spaţiu prehilbertian un spaţiu liniar normat $\mathcal{H}$, în care norma este definită de un anumit produs scalar, adică în $\mathcal{H}$ este definit un produs scalar (x, y), astfel încît $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz într-un spaţiu prehilbertian se scrie asfel

$$|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$$

Definiţia 3. Se numeşte spaţiu hilbertian (sau spaţiu Hilbert) orice spaţiu Banach, în care norma este definită de un produs scalar pin formula $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Cu alte cuvinte, un spaţiu hilbertian este un spaţiu prehilbertian care este şi complet ca spaţiu normat.

Spaţiile R^m, C^m, l_2, $L_2(\mathrm{T}, \Sigma, \mu)$ din exemplele 1-4 sînt spaţii Hilbert, iar spaţiul $C[a, b]$ cu produsul scalar

$$(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

este un spaţiu prehilbertian, dar care nu este spaţiu Hilbert ($C_2[a, b]$ nu este complet; §20, exemplul 6).

Teorema 3. Într-un spaţiu prehilbertian produsul scalar este continuu faţă de convergenţa în normă, adică din $x_n \to x$ şi $y_n \to y$ rezultă $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Demonstraţie. Fie $x_n \to x$ şi $y_n \to y$. Avem

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| = |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| = |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)|$$
$$\leq \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\|.$$

Șirul $\{x_n\}_1^\infty$ fiind convergent, este și mărginit, deci există o constantă M , astfel încît $\|x_n\| \leq M$ $(n = 1,2, \ldots\ldots)$. Avem

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \leq M\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \to 0$$

și deci $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

§ 30. Proprietatea caracteristică a spaţiilor prehilbertiene

Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu prehilbertian. Pentru orice $x, y \in \mathcal{H}$ avem

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = (x + y, x + y) + (x - y, x - y) =$$

$$= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Identitatea obţinută

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad (1)$$

se numeşte identitatea paralelogramului.

John von Neumann şi Iordan în anul 1935 au demonstrat că identitatea paralelogramului este o proprietate caracteristică a spaţiilor prehilbertiene.

Teoremă. Pentru ca un spaţiu liniar normat $\mathcal{H}$ să fie spaţiu prehilbertian este necesar şi suficient ca pentru orice $x, y \in \mathcal{H}$ să fie adevărată identitatea paralelogramului.

Demonstraţie. Necesitatea condiţiei acestei teoreme a fost stabilită mai sus. Să demonstrăm suficienţa. Fie că în spaţiul liniar normat $\mathcal{H}$ pentru orice elemente x, y este adevărată egalitatea (1).Vom demonstra că în $\mathcal{H}$ poate fi definit un produs scalar (x, y), astfel încît $\|x\|^2 = (x,x)$ pentru orice $x \in \mathcal{H}$. Vom considera cazul spaţiului real. În acest caz punem

$$(x,y) = \tfrac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \qquad (2)$$

Vom arăta că formula (2) defineşte un produs scalar care generează norma din spaţiul $\mathcal{H}$.

Avem

$$(x,x) = \tfrac{1}{4}(\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2) = \tfrac{1}{4}\|2x\|^2 = \|x\|^2 \geq 0;$$

(x,x)=0 dacă şi numai dacă $\|x\|^2 = 0$ şi deci x =0 ;

$$(y,x) = \frac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = (x,y).$$

Deci primele două axiome ale produsului scalar sunt adevărate.. Trecem la a treia. Utilizînd formula (2) şi identitatea paralelogramului, obţinem

$$4\big((x+y,z) - (x,z) - (y,z)\big) = \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 -$$

$$-\|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 = \|(x+z)+y\|^2 +$$

$$+\|(x+z)-y\|^2 - \|x+(z-y)\|^2 - \|x-(z-y)\|^2 - \|x+z\|^2 +$$

$$+\|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 = 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - 2\|x\|^2 -$$

$$-2\|z-y\|^2 - \|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|y+z\|^2 + \|y-z\|^2 =$$

$$= \|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|z-y\|^2 - \|z+y\|^2 +$$

$$+2\|y\|^2 - 2\|x\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|z\|^2 - 2\|z\|^2 - 2\|y\|^2 + 2\|y\|^2 - 2\|x\|^2 = 0.$$

De aici rezultă justeţea celei de-a treia proprietăţi a produsului scalar:

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z).$$

Din această egalitate avem

$$(2x, y) = (x + x, y) = (x, y) + (x, y) = 2(x, y).$$

Utilizînd metoda inducţiei matematice, stabilim că

$$(nx, y) = n(x, y),$$

pentru orice $n \in N$.

Înlocuind pe x cu $\frac{1}{n}x$, obţinem

$$(x, y) = \left(n \cdot \frac{1}{n}x, y\right) = n\left(\frac{1}{n}x, y\right),$$

sau

$$\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{1}{n}(x, y).$$

În consecinţă pentru orice $m \in N$ avem

$$\left(\frac{m}{n}x, y\right) = \left(m \cdot \frac{1}{n}x, y\right) = m\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{m}{n}(x, y). \qquad (3)$$

Din (2) rezultă că

$$(0, y) = \frac{1}{4}(\|0 + y\|^2 - \|0 - y\|^2) = 0$$

şi deci $0 = (x + (-x), y) = (x, y) + (-x, y)$ sau $(-x, y) = -(x, y)$.

De aici şi din (3) obţinem

$$\left(-\frac{m}{n}x, y\right) = \frac{m}{n}(-x, y) = -\frac{m}{n}(x, y). \qquad (4)$$

Prin urmare, ţinînd cont de (3) şi (4), pentru orice număr raţional $r \in$ Q avem

$$(rx, y) = r(x, y) \qquad (5)$$

Fie acum λ ∈ R un număr real arbitrar. Dacă r_n ∈ Q, $r_n \to \lambda$ atunci, utilizînd continuitatea operaţiilor algebrice şi a normei într-un spaţiu normat, obţinem

$$(r_n x, y) = \frac{1}{4}(\|r_n x + y\|^2 - \|r_n x - y\|^2) \to \frac{1}{4}(\|\lambda x + y\|^2 - \|\lambda x - y\|^2) = (\lambda x, y).$$

Pe de altă parte, din (5) avem

$$(r_n x, y) = r_n(x, y) \to \lambda(x, y).$$

Conform unicităţii limitei unui şir convergent, avem

$$(\lambda x, y) = \lambda(x, y),$$

adică şi cea de-a patra axiomă a produsului scalar este satisfăcută. Aşadar, pentru cazul spaţiului real teorema este demonstrată.

Dacă spaţiul normat este complex, considerăm expresia

$$(x, y)_1 = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2) \qquad (6)$$

Utilizînd (2), constatăm că relaţia (6) se poate scrie sub forma

$$(x, y)_1 = (x, y) - i(ix, y).$$

Din cele demonstrate mai sus rezultă, că

$$(x + z, y)_1 = (x + z, y) - i(ix + iz, y) = (x, y) + (z, y) -$$

$$-i(ix, y) - i(iz, y) = (x, y)_1 + (z, y)_1 , \qquad (7)$$

$$(\lambda x, y)_1 = (\lambda x, y) - i(i\lambda x, y) = \lambda(x, y) - \lambda i(ix, y) = \lambda(x, y)_1 \qquad (\lambda \in R)$$

Pe de altă parte, pentru numărul imaginar i avem

$$(ix, y)_1 = \frac{1}{4}(\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2 + i\|ix + iy\|^2 - i\|ix - iy\|^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(\|ix + y\|^2 - \|ix - y\|^2 + i\|x + y\|^2 - i\|x - y\|^2) =$$

$$= \frac{i}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|i(x+iy)\|^2 - i\|i(x-iy)\|^2) = i(x,y)_1.$$

Pentru orice număr complex λ + iμ acum obţinem

$$\big((\lambda+i\mu)x,y\big)_1 = (\lambda x + i\mu x, y)_1 = (\lambda x, y)_1 + (i\mu x, y)_1 = \lambda(x,y)_1 + i\mu(x,y)_1 =$$

$$= (\lambda+i\mu)(x,y)_1 \qquad (8)$$

Proprietăţile 1) − 2) ale produsului scalar rezultă direct din (6):

$$(x,x)_1 = \frac{1}{4}(\|2x\|^2 + i\|(1+i)x\|^2 - i\|(1-i)x\|^2) =.$$

$$= \|x\|^2 + \tfrac{1}{2}i\|x\|^2 - \tfrac{1}{2}i\|x\|^2 = \|x\|^2 \geq 0, \qquad (9)$$

$$(x,y)_1 = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 + i\|ix-y\|^2 - i\|ix+y\|^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2 - i\|y+ix\|^2 + i\|y-ix\|^2) = \overline{(y,x)}_1. \ (10)$$

Relaţiile (7) − (10) arată, că formula (6) defineşte un produs scalar în spaţiul normat complex $\mathcal{H}$, astfel încît $\|x\|^2 = (x,x)_1$ pentru orice $x \in \mathcal{H}$. Teorema este demonstrată.

Exemple.

1. Din paragraful precedent cunoaştem că spaţiul l_2 este spaţiu Hilbert. Fierşte apare întrebarea : mai sînt oare printre spaţiile l_p ($1 \leq p \leq \infty$) spaţii Hilbert ? Să arătăm că nu sînt. În adevăr, fie l_p − spaţiu Hilbert. Atunci pentru $x = (1,0,0,\dots)$, $y = (0,1,0,\dots)$ avem

$$\|x+y\| = 2^{\frac{1}{p}},\ \|x-y\| = 2^{\frac{1}{p}},\ \ \|x\| = \|y\| = 1$$

şi deci, conform identităţii paralelogramului, avem

$$2^{\frac{2}{p}} + 2^{\frac{2}{p}} = 2 + 2, \;\; 2^{\frac{2}{p}} = 2, \qquad p = 2.$$

2. În spatiul $C[0,\ 1]$ să luăm $x = 1,\ y = t$. Avem $\|x+y\|$ =2, $\|x-y\|$ =1 şi deci $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 5 \neq 4 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. Prin urmare spatiul $C[0,\ 1]$ nu este spatiu Hilbert.

§ 31. 0rtogonalitate în spaţiile prehilbertiene

Fie $\mathcal{H} -$ un spaţiu prehilbertian.

Definiţia 1. Doi vectori $x, y \in \mathcal{H}$ se numesc ortogonali, dacă $(x, y) = 0$. Se notează $x \perp y$.

Este evident că $x \perp y_k$ (k = l, 2, …, n) implică

$$x \perp \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k \quad (\alpha_k \in K).$$

Teorema 1. (Pitagora). Dacă vectorii $\{x_j\}_1^n$ din spaţiul prehilbertian sînt ortogonali doi cîte doi, atunci

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2.$$

În particular, dacă $x \perp y$ atunci $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Demonstraţie. Vectorii $\{x_j\}_1^n$ sînt ortogonali doi cîte doi şi deci $(x_j, x_k) = 0$ $(j \neq k)$, ceea ce implică

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j, \sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_j, x_k) = \sum_{j=1}^{n}(x_j, x_j) = \sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^2.$$

Această teoremă se generalizează pentru o mulţime numărabilă de vectori. Desigur, în acest caz trebuie să asigurăm convergenţa seriilor respective. Este adevărată

Teorema 2. Fie $\{x_j\}_1^\infty -$ un şir de vectori ortogonali doi cîte doi în spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$. Seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad (1)$$

converge în $\mathcal{H}$, dacă și numai dacă este convergentă seria numerică

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2. \qquad (2)$$

În cazul convergenței seriei (1), avem

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^2.$$

Demonstrație. Fie seria (1) convergentă. Conform criteriului de convergență al seriilor în spațiile Banach, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0 \in N$, astfel încît

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right\| < \sqrt{\varepsilon} \qquad (3)$$

oricare ar fi $n \geq n_0$ şi $p \in N$.

Ţinînd cont de teorema 1, ridicăm ambele părţi ale inegalităţii (3) la pătrat şi obţinem

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|^2 < \varepsilon \qquad (4)$$

oricare ar fi $n \geq n_0$ şi $p \in N$. De aici, conform criteriului Cauchy de convergenţă al seriilor numerice, obţinem că seria (2) este convergentă. Prin urmare, convergenţa seriei (1) în spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$ implică convergenţa seriei numerice (2). Repetînd acelaşi raţionament în ordine inversă, obţinem că din convergenţa seriei (2) rezultă convergenţa seriei (1).

Să demonstrăm acum partea a doua a teoremei. Dacă

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

atunci, utilizînd teorema 1, putem scrie

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2. \tag{5}$$

Cum însă

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

şi norma este o funcţie continuă, avem

$$\lim_{n\to\infty} \|s_n\| = \|s\|.$$

Trecem acum la limită în egalitatea (5) şi obţinem

$$\|s\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2. \qquad .$$

Definiţia 2. Se zice că vectorull $x \in \mathcal{H}$ este ortogonal pe mulţimea nevidă $A \subset \mathcal{H}$, dacă $x \perp y$ oricare ar fi $y \in A$. Se notează $x \perp A$.

Teorema 3. Vectorul $x \in \mathcal{H}$ este ortogonal pe mulţimia $A \subset \mathcal{H}$, dacă şi numai dacă x este ortogonal pe închiderea acestei mulţimi.

Demonstraţie. Deoarece $A \subset \bar{A}$, din $x \perp \bar{A}$, evident, rezultă $x \perp A$. Reciproc, fie $x \perp A$. Dacă $y \in \bar{A}$, atunci există $\{y_n\}_1^\infty \subset A$ cu

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Produsul scalar fiind o funcție continuă, avem

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} (x, y_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Deci $x \perp y$ pentru orice $y \in \bar{A}$ şi prin urmare $x \perp \bar{A}$**.**

Consecinţă. Dacă mulţimea A este densă în spaţiul $\mathcal{H}$ şi $x \perp A$, atunci $x = 0$.

Într-adevăr, în acest caz $x \perp \bar{A} = \mathcal{H}$ şi, în particular $x \perp x$. Însă $(x, x) = 0$ implică $x = 0$.

Definiţia 3. Fie A o mulţime nevidă din $\mathcal{H}$. Mulţimea $A^{\perp} = \{x \in \mathcal{H} : x \perp \mathrm{A}\}$ se numeşte complementul ortogonal al lui A.

Teorema 4. Mulţimea $A^{\perp}$ este un subspaţiu al spaţiului $\mathcal{H}$.

Demonstraţie. Fie $y, z \in A^{\perp}$, $\alpha \in K$. Pentru orice $x \in A$ avem $(x, y) = (x, z) = 0$ şi deci $(x, y + z) = (x, y) + (x, z) = 0$, $(x, \alpha y) = \bar{\alpha}(x, y) = 0$. Prin urmare, $y + z \in A^{\perp}$, $\alpha y \in A^{\perp}$, adică $A^{\perp}$ este varietate liniară. Ea este şi inchisă , deoarece dacă $y_n \in A^{\perp}$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, atunci pentru orice $x \in A$ avem $\lim_{n\to\infty} (x, y_n) = (x, y)$. Însă, deoarece $(x, y_n)=0$, rezultă că $(x, y) =0$ şi deci $y \in A^{\perp}$.

Definiţia 4. Mulţimile M_1 şi M_2 din spatiul $\mathcal{H}$ se numesc ortogonale, dacă $x \perp y$ oricare ar fi $x \in M_1$, $y \in M_2$. Se scrie $M_1 \perp M_2$.

§ 32. Distanţa de la un punct la o mulţime convexă

Definiţia 1. Fie E un spaţiu liniar şi $x, y \in E$. Se numeşte segment de extremităţi x şi y (se notează $[x, y]$) mulţimea tuturor elementelor de forma

$$[x, y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y : 0 \le \lambda \le 1\}.$$

Se spune că o mulţime *M* din *E* este convexă, dacă pentru orice pereche de elemente $x, y \in M$ tot segmentul $[x, y]$ aparţine mulţimii *M*.

Exemple.

1. Orice varietate liniară într-un spaţiu liniar este mulţime convexă.

2. Orice sferă într-un spaţiu liniar normat este mulţime convexă,

Într-adevăr, fie $x, y \in S(a, r)$. Atunci $\| x - a \| < r$, $\| y - a \| < r$ şi deci

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y - a\| = \|(1-\lambda)x + \lambda y - (1-\lambda)a - \lambda a\| \le$$

$$\le (1-\lambda)\|x - a\| + \lambda\|y - a\| < (1-\lambda)r + \lambda r = r.$$

Prin urmare $(1-\lambda)x + \lambda y \in S(a; r)$ oricare ar fi λ: $0 \le \lambda \le 1$.

Ţinînd cont de definiţia distanţei de la un punct la o mulţime într-un spaţiu metric e firesc să acceptăm următoarea definiţie.

Definiţia 2. Fie $\mathfrak{N}$ un spaţiu liniar normat, M – o mulţime oarecare nevidă din $\mathfrak{N}$ şi $x \in \mathfrak{N}$. Se numeşte distanţă de la *x* la *M* numărul nenegativ

$$\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

<u>**Teoremă**</u>. Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert, M – o mulţime nevidă convexă şi închisă în $\mathcal{H}$. Pentru orice $x \in \mathcal{H}$ există în *M* un element *y*, determinat în mod unic, astfel încît $\| x - y \| = \rho(x, M)$. Cu alte cuvinte, pentru orice $x \in \mathcal{H}$ în mulţimea *M* există elementul de cea mai buna aproximare a lui *x* (elementul ce realizează distanţa de la *x* la *M*) şi un astfel de element este unic.

Demonstraţie. Fie $x \in \mathcal{H}$. Pentru simplitate punem $\rho(x, M) = \rho$. Avem deci

$$\rho = \inf_{u \in M} \|x - u\|.$$

Conform definiţiei marginii inferioare, există un şir $\{u_n\}_1^\infty \subset M$, astfel că

$$\rho \leq \|x - u_n\| < \rho + \frac{1}{n} \quad (n = 1,2, \ldots) \qquad (1)$$

Să arătăm că şirul $\{u_n\}_1^\infty$ este fundamental. Aplicăm identitatea paralelogramului şi obţinem

$$\|(x - u_n) + (x - u_m)\|^2 + \|(x - u_n) - (x - u_m)\|^2 = 2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2.$$

De aici rezultă egalitatea

$$\|u_m - u_n\|^2 = 2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\right\|^2. \qquad (2)$$

Întrucît elementele $u_n, u_m \in M$, mulţimea M fiind convexă, avem

$$\frac{u_n + u_m}{2} \in M$$

(în definiţia segmentului punem $\lambda = \frac{1}{2}$). Prin urmare,

$$\left\|x - \frac{u_n + u_m}{2}\right\| \geq \rho\,. \qquad (3)$$

Din (l) − (3) obţinem

$$\|u_m - u_n\|^2 < 2\left(\rho + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(\rho + \frac{1}{m}\right)^2 - 4\rho^2 = \left(\frac{4}{n} + \frac{4}{m}\right)\rho + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \to 0$$

$(m, n \to \infty)$

şi deci şirul $\{u_n\}_1^\infty$ este fundamental. Spaţiul $\mathcal{H}$ fiind complet, rezultă că acest şir este convergent. Fie

$$\lim_{n\to\infty} u_n = y.$$

Mulţimea M este închisă şi deci $y \in M$. Trecem la limită în inegalităţile (1) şi obţinem : $\rho \leq \|x - y\| \leq \rho$, adică $\|x - y\| = \rho$.

Să demonstrăm unicitatea elementului de cea mai buna aproximare din *M*. Fie $\|x-y\| = \|x-y_1\| = \rho$, unde $y, y_1 \in M$. Ţinînd cont, că mulţimea *M* este convexă, avem $\frac{y+y_1}{2} \in M$ şi deci

$$\rho \leq \left\|x - \frac{y+y_1}{2}\right\| = \frac{1}{2}\|(x-y)+(x-y_1)\| \leq \frac{1}{2}\|x-y\| + \frac{1}{2}\|x-y_1\| = \rho.$$

Prin urmare, $\|(x-y)+(x-y_1)\| = \|x-y\| + \|x-y_1\|$, adică în inegalitatea triunghiului are loc semnul " egal ", ceea ce în orice spaţiu Hilbert implică existenţa unui număr $\lambda \geq 0$, astfel încît

$$(x-y) = \lambda(x-y_1).$$

De aici $\rho = \|x-y\| = \lambda\|x-y_1\| = \lambda\rho$. Egalitatea $\rho = \lambda\rho$ implică $\rho = 0$ sau $\lambda = 1$. În ambele cazuri $y_1 = y$.

Observaţie. Într-un spaţiu Banach arbitrar o teoremă analogă nu este adevărată, adică în mulţimea *M* poate să nu existe elementul cel mai apropiat de elementul *x* sau pot că existe mai multe elemente ce realizează distanţa de la *x* la *M*. Dăm exemplele respective.

l . În spaţiul $C[0, 1]$ considerăm subspaţiul $L = \{x \in C[0, 1] : x(0) = 0\}$ şi elementul $x_0(t) = 1$. Atunci:

$$\rho(x_0, L) = \inf_{y\in L}\|x_0 - y\| = \inf_{y\in L}\max_{0\leq t\leq 1}|1-y(t)| \geq \inf_{y\in L}|1-y(0)| = 1.$$

Pe de altă parte, $\rho(x_0, L) \leq \|x_0 - 0\| = 1$. De aici $\rho(x_0, L) = 1$. Se constată fără dificultate, că pentru orice $y \in L$ cu proprietatea $0 \leq y(t) \leq 2$ avem $\|x_0 - y\| = 1$ şi deci toate aceste funcţii realizează distanţa de la x_0 la L (putem, considera, de exemplu, $y(t) = \sin \alpha t$, $0 \leq \alpha \leq 1$). Aici, pentru elementul $x_0 \in C[0, 1]$ în mulțimea L există o mulțime infinită de elemente de cea mai bună aproximare.

3. În spaţiul l_1 considerăm mulţimea

$$M = \left\{ x = \{\xi_j\}_1^\infty \in l_1 : \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j+1} \xi_j = 0 \right\}.$$

Se vede ușor că mulțimea M este varietate liniară (și deci mulțime convexă) închisă în l_1. Să arătăm că pentru orice $x \in l_1, x \neq 0$ avem $\rho(x, M) < \|x\|$. Fie

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j+1} \xi_j = \alpha\,, \qquad e_k = \Big(\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{k}, 0, \dots\Big),$$

$$u_k = x - \alpha \frac{k+1}{k} e_k = \left(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k - \frac{k+1}{k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j+1} \xi_j\,, \xi_{k+1}, \dots \right).$$

Elementele $u_k \in M$ și deci

$$\rho(x, M) = \inf_{z \in M} \|x - z\| \le \inf_k \|x - u_k\| = \inf_k \frac{k+1}{k} \left| \alpha \right| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j+1} \xi_j \right| \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{j+1} \left| \xi_j \right| < \sum_{j=1}^{\infty} \left| \xi_j \right| = \|x\|\,.$$

Să demonstrăm în continuare că pentru orice $x_0 \in l_1$, $x_0 \notin M$ în mulțimea M nu există un element de cea mai bun aproximare. Admitem contrariul. Fie $z_0 \in M$, $\rho(x_0, M) = \|x_0 - z_0\|$. Notăm $x_0 - z_0 = u$. Avem $u \neq 0$ şi $\rho(u, M) = \inf_{z \in M} \|u - z\| = \inf_{z \in M} \|x_0 - (z_0 + z)\| = \inf_{y \in M} \|x_0 - y\| = \rho(x_0, M) = \|x_0 - -z_0\| = \|u\|$. Conform celor demonstrate mai sus, egalitatea $\rho(u, M) = \|u\|$ este imposibilă , deoarece $u \neq 0$. Aşadar pentru orice $x_0 \in l_1$, $x_0 \notin M$ în mulţimea M nu există un element de cea mai bună aproximare, deşi mulţimea M este convexă (chiar este subspaţiu).

§ 33. Proiecţia unul vector pe un subspaţiu

Fie $\mathfrak{M}$ un subspaţiu al spaţiului Hilbert $\mathcal{H}$. Confonn teoremei din paragraful precedent (deoarece subspaţiul este un caz particular al mulţimii convexe şi închise) , pentru orice $x \in \mathcal{H}$ există un element unic determinat $y \in \mathfrak{M}$, astfel încît $\rho(x, \mathfrak{M}) = \|x - y\|$. Acest element y posedă o proprietate importantă , ceea ce rezultă din

Teorema 1. Dacă $x \in \mathcal{H}, y \in \mathfrak{M}$ şi $\|x - y\| = \rho(x, \mathfrak{M})$, atunci $x - y \perp \mathfrak{M}$

Demonstraţie. Fie $z \in \mathfrak{M}$, $z \neq 0$. Punem $\lambda = \frac{(x-y,z)}{\|z\|^2}$ şi considerăm elementul $w = y + \lambda z$. Evident, $w \in \mathfrak{M}$ şi

$$\rho^2(x, \mathfrak{M}) \leq \|x - w\|^2 = (x - w, x - w) = (x - y - \lambda z, x - y - \lambda z) =$$

$$= (x - y, x - y) - \lambda(z, x - y) - \bar{\lambda}(x - y, z) + \lambda\bar{\lambda}(z, z) = \|x - y\|^2 - \frac{|(x-y,z)|^2}{\|z\|^2} -$$

$$- \frac{|(x-y,z)|^2}{\|z\|^2} + \frac{|(x-y,z)|^2}{\|z\|^2} = \rho^2(x, \mathfrak{M}) - \frac{|(x-y,z)|^2}{\|z\|^2}$$

Prin urmare ,

$$\rho^2(x, \mathfrak{M}) \leq \rho^2(x, \mathfrak{M}) - \frac{|(x-y,z)|^2}{\|z\|^2}.$$

De aici rezultă

$$\frac{|(x-y,z)|^2}{\|z\|^2} \leq 0$$

şi deci $(x - y, z) = 0$. Întrucît elementul z a fost luat arbitrar în $\mathfrak{M}$, rezultă că $x - y \perp \mathfrak{M}$.

Observaţie. Dacă pentru $x \in \mathcal{H}, y \in \mathfrak{M}$ avem $x - y \perp \mathfrak{M}$, atunci

$$\rho(x, \mathfrak{M}) = \|x - y\|.$$

Într-adevăr, fie $y_1 \in \mathfrak{M}$ – un element arbitrar din $\mathfrak{M}$. Elementul $y - y_1 \in \mathfrak{M}$,iar $x - y \perp \mathfrak{M}$, ceea ce implică $x - y \perp y - y_1$. Aplicam teorema Pitagora şi obţinem

$\|x-y_1\|^2 = \|(x- y)+(y-y_1)\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-y_1\|^2 \geq \|x-y\|^2$.

Prin urmare, $\|x-y_1\| \geq \|x-y\| \geq \rho(x,\mathfrak{M})$ pentru orice $y_1 \in \mathfrak{M}$. De aici rezultă că $\|x-y\| = \rho(x,\mathfrak{M})$.

Teorema 2. Dacă $\mathcal{H}$ este un spaţiu Hilbert, iar $\mathfrak{M}$ un subspaţiu al lui $\mathcal{H}$, atunci orice element $x \in \mathcal{H}$ se reprezintă în mod unic sub forma $x = y + z$ cu $y \in \mathfrak{M}$, $z \in \mathfrak{M}^{\perp}$.

Demonstraţie. Pentru orice $x \in \mathcal{H}$, în virtutea teoremei din paragraful precedent şi a teoremei 1, există un element $y \in \mathfrak{M}$ încît $x - y \perp \mathfrak{M}$. Notăm $x - y = z$ şi obţinem $x = y + z$, $y \in \mathfrak{M}$, $z \in \mathfrak{M}^{\perp}$. Să demonstrăm unicitatea reprezentării. Fie $x = y' + z'$, $y' \in \mathfrak{M}$, $z' \in \mathfrak{M}^{\perp}$. Avem $x + y = y' + z'$, $y - y' = z' - z$. Însă $\mathfrak{M}^{\perp}$ este de asemenea un subspaţiu şi deci $z' - z \in \mathfrak{M}^{\perp}$ (sau $z' - z \perp \mathfrak{M}$). De aici $y-y' = z' - z \perp \mathfrak{M}$. Din $y - y' \in \mathfrak{M}$ şi $y-y' \perp \mathfrak{M}$ rezultă $(y - y', y - y') = 0$. Ultima egalitate implică $y - y' = 0$, ceea ce la rîndul său implică $y' = y$, $z' = z$.

Avînd în vedere definiţia sumei directe a două subspaţii, din teorema 2 obţinem

Teorema 3. Fie $\mathfrak{M}$ un subspaţiu al spaţiului Hilbert $\mathcal{H}$, iar $\mathfrak{M}^{\perp}$ – complementul ortogonal al subspaţiului $\mathfrak{M}$. Spaţiul $\mathcal{H}$ este suma directă a subspaţiilor $\mathfrak{M}$ şi $\mathfrak{M}^{\perp}$:

$\mathcal{H} = \mathfrak{M} \dot{+} \mathfrak{M}^{\perp}$, adică orice $x \in \mathcal{H}$ în mod unic se reprezintă sub forma $x = y + z$ cu $y \in \mathfrak{M}$, $z \in \mathfrak{M}^{\perp}$.

Definiţia 1. Dacă spaţiul $\mathcal{H}$ este suma directă a subspaţiilor $\mathfrak{M}$ şi $\mathfrak{N}$ cu $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$, atunci spunem că $\mathcal{H}$ este suma ortogonală a subspaţiilor $\mathfrak{M}$ şi $\mathfrak{N}$ şi scriem $\mathcal{H} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$.

Teorema 3 acum poate fi formulate astfel:

Teorema 3'. Fie $\mathfrak{M}$ un subspaţiu al spaţiului Hilbert $\mathcal{H}$, iar $\mathfrak{M}^{\perp}$ – complementul ortogonal. Spaţiul $\mathcal{H}$ este suma ortogonală a subspaţiilor $\mathfrak{M}$ şi $\mathfrak{M}^{\perp}$: $\mathcal{H} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}^{\perp}$.

Definiţia 2. Dacă $x = y + z$, unde $y \in \mathfrak{M}$, $z \perp \mathfrak{M}$, atunci spunem că y este proiecţia vectorului x pe $\mathfrak{M}$ şi scriem $y = \mathrm{pr}_{\mathfrak{M}}\, x$.

Este clar că în mod analog $z = \mathrm{pr}_{\mathfrak{M}^{\perp}} x$.

Consecinţa 1. Fie $\mathfrak{M}_1$ şi $\mathfrak{M}_2$ – două subspaţii ale spaţiului Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_2 \neq \mathfrak{M}_1$. Există în $\mathfrak{M}_2$ un element e, astfel încît $\|e\| = 1$, $e \perp \mathfrak{M}_1$.

Într-adevăr, din teorema 3 avem $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{N}$. Subspaţiul $\mathfrak{N} \neq \{0\}$ şi deci există un vector $e \in \mathfrak{N}$, $\|e\| = 1$. Evident, $e \in \mathfrak{M}_2$, $e \perp \mathfrak{M}_1$.

Consecinţa 2. Fie L o varietate liniară în spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$. Mulţimea L este densă în $\mathcal{H}$, dacă şi numai dacă $x \perp L$ implică $x = 0$ (adică $L^{\perp} = \{0\}$).

Într-adevăr, dacă $\overline{L} = \mathcal{H}$ şi $x \perp L$, atunci $x \perp \mathcal{H}$, ceea ce implică $x \perp x$, adică $x = 0$. Dacă însă $\overline{L} \neq \mathcal{H}$, atunci conform consecintei 1, există în $\mathcal{H}$ un vector e astfel încît $\|e\| = 1$ şi $e \perp L$.

§ 34. Sisteme ortonormate complete

Fie $\mathcal{H}$ un spaţiu Hilbert.

Definiţia 1. Un sistem de vectori $\{x_j\} \subset \mathcal{H}$ se numeşte total, dacă $x \in \mathcal{H}$, $x \perp x_j$ $(\forall j)$ implică $x = 0$.

Teorema 1. Sistemul $\{x_j\} \subset \mathcal{H}$ este total, dacă şi numai dacă el este complet în $\mathcal{H}$.

Demonstraţie. Fie $\{x_j\}$ un sistem complet, adică $\overline{L\{x_j\}} = \mathcal{H}$. Dacă $x \perp x_j$ $(\forall j)$ atunci

$$\left(x, \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_j}(x, x_j) = 0$$

şi deci $x \perp L\{x_j\}$, ceea ce implică $x \perp \overline{L\{x_j\}} = \mathcal{H}$. În particular, $x \perp x$, adică $(x, x) = 0$, $x = 0$. Prin urmare, sistemul $\{x_j\}$ este total.

Fie că $\{x_j\}$ nu este complet, adică $\overline{L\{x_j\}} \neq \mathcal{H}$. Conform consecinţei 1 şi §33, există $e \in \mathcal{H}$ cu $\|e\| = 1$ şi $e \perp \overline{L\{x_j\}}$ În particular, $e \perp x_j$ ($\forall\, j$), adică sistemul $\{x_j\}$ nu este total.

Definiţia 2. Sistemul de elemente $\{x_j\} \subset \mathcal{H}$ se numeşte sistem ortogonal, dacă $x_j \perp x_k$ $(j \neq k)$. Sistemul $\{x_j\} \subset \mathcal{H}$ se numeşte ortonormat (sau ortonormal), dacă este ortogonal şi dacă $\|x_j\| = 1$ oricare ar fi j, adică

$$(x_j, x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, j = k \\ 0, j \neq k \,. \end{cases}$$

Teorema 2. Dacă $\{x_j\}$ este un sistem ortogonal şi nu conţine elementul nul, atunci elementele acestui sistem formează o mulţime liniar independentă.

Demonstraţie. Fie

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j = 0.$$

Pentru orice $k = 1, 2, \ldots, m$ avem

$$0 = (0, x_k) = \left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j \, , x_k \right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (x_j, x_k) = \alpha_k \|x_k\|^2.$$

Întrucit $x_k \neq 0,$ rezultă că $\alpha_k = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, m$) şi deci sistemul este liniar independent.

Să examinăm problema existenţei sistemelor ortonormate totale în spaţiile Hilbert.

Teorema 3. Dacă spaţiul Hilbert este separabil, atunci există un sistem finit sau numărabil de vectori $\{e_j\}$**,** ortonormat şi total în $\mathcal{H}$.

Demonstraţie. Vom considera cazul $dim\, \mathcal{H} = \infty$ (în cazul $dim\, \mathcal{H} < \infty$ raţionamentul este mai simplu). Fie $\{x_j\}_1^{\infty}$ o mulţime peste tot densă în $\mathcal{H}$ şi $x_1 \neq 0$. Punem $n_1 = 1$. Notăm prin n_2 cel mai mic indice pentru care vectorii x_{n_1} şi x_{n_2} sunt liniar independenţi, prin n_3

cel mai mic indice pentru care vectorii $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}$ sînt liniar independenţi şi aşa mai departe. Prin inducţie obţinem şirul de vectori liniar independenţi $\{x_{n_k}\}_1^\infty$. Notăm

$$y_1 = x_{n_1}, y_2 = x_{n_2}, \dots, y_k = x_{n_k}, \dots$$

şi $\mathfrak{M}_k = L\left(\{y_j\}_1^k\right)$ $(k = 1, 2, \dots)$

Fără dificultate se constată că $dim\,\mathfrak{M}_k = k$ şi $L\left(\{x_j\}_1^{n_k}\right) = \mathfrak{M}_k$ $(k = 1, 2, \dots)$. De aici imediat rezultă egalitatea $L\left(\{x_j\}_1^\infty\right) = L\left(\{y_j\}_1^\infty\right)$. Întrucit mulţimea $\{x_j\}_1^\infty$ este peste tot densă, avem $\mathcal{H} = \overline{\{x_j\}_1^\infty} \subset \overline{L\left(\{x_j\}_1^\infty\right)} = \overline{L\left(\{y_j\}_1^\infty\right)}$, de unde rezultă egalitatea $\overline{L\left(\{y_j\}_1^\infty\right)} = \mathcal{H}$, ceea ce arată că $\{y_j\}_1^\infty$ este un sistem complet. Aşa cum

$\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{M}_k \subset \dots (\mathfrak{M}_k \neq \mathfrak{M}_j)$, din consecinţa 1 §33 avem: există $e_j \in \mathfrak{M}_j$ $\| e_j \| = 1$, $e_j \perp \mathfrak{M}_{j-1}$ $(j = 2, 3, \dots)$.

Punem $e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$. Atunci $\{e_j\}_1^\infty$ este un sistem ortonormat şi $\overline{L\left(\{e_j\}_1^\infty\right)} = \overline{L\left(\{y_j\}_1^\infty\right)}$. De aici $\overline{L\left(\{e_j\}_1^\infty\right)} = \mathcal{H}$ şi deci $\{e_j\}_1^\infty$ este un sistem ortonormat şi complet în $\mathcal{H}$.

Să expunem încă o metodă de obţinere a unui sistem ortonomat complet, pornind de la un sistem complet de vectori liniar independenţi, şi anume, metoda de ortogonalizare Gram-Schmidt.

Teorema 4. Fie $\{y_j\}$ un sistem de vectori liniar independenţi în spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$. Există un sistem ortonormat $\{e_j\}$ astfel încît

$$L\left(\{y_j\}_1^n\right) = L\left(\{e_j\}_1^n\right)$$

pentru orice n.

Demonstraţie. Punem $e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$. Alegem vectorul $z_2 = y_2 - \alpha_1^{(2)} e_1$ astfel ca $(z_2, e_1) = 0$. De aici avem:

$$0 = (z_2, e_1) = (y_2, e_1) - \alpha_1^{(2)}(e_1, e_1) = (y_2, e_1) - \alpha_1^{(2)},$$

de unde rezultă că $\alpha_1^{(2)} = (y_2, e_1)$. Elementul $z_2 \neq 0$, deoarece vectorii y_1 şi y_2 sînt liniar independenţi. Punem $e_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|}$. Evident $e_2 \perp e_1$. Din

$$e_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}, \qquad y_1 = \|y_1\| \cdot e_1,$$

$$e_2 = \frac{1}{\|z_2\|} \cdot y_2 - \frac{\alpha_1^{(2)}}{\|z_2\| \cdot \|y_1\|} \cdot y_1, \qquad y_2 = \|z_2\| \cdot e_2 + \alpha_1^{(2)} e_1.$$

imediat obţinem

$$L(\{y_1\}) = L(\{e_1\}), \qquad L\left(\{y_j\}_1^2\right) = L\left(\{e_j\}_1^2\right).$$

Pentru a demonstra teorema, vom utiliza metoda inducţiei matematice. Fie sistemul de elemente $e_1, e_2, \dots, e_k$ obţinut din $y_1, y_2, \dots, y_k$ cu proprietăţile

$$e_j \perp e_i \ (j \neq i), \qquad L\left(\{y_j\}_1^m\right) = L\left(\{e_j\}_1^m\right) (m \leq k). \qquad (1)$$

Vom construi elementul e_{k+1} în modul următor: alegem elementul $z_{k+1} = y_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k+1)} e_j$, astfel ca $(z_{k+1}, e_j) = 0$ (j = 1, 2, …, k). De aici avem $\alpha_j^{(k+1)} = (y_{k+1}, e_j)$ (j = 1, 2, …, k).

Conform egalităţilor (1) avem

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k+1)} e_j \in L\left(\{e_j\}_1^k\right) = L\left(\{y_j\}_1^k\right)$$

şi deci

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k+1)} e_j = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j y_j.$$

Prin urmare, $z_{k+1} = -\sum_{j=1}^{k} \gamma_j y_j + y_{k+1}$. Vectorii $\{y_j\}$ fiind liniar independent, rezultă că $z_{k+1} \neq 0$. Punem $e_{k+1} = \frac{z_{k+1}}{\|z_{k+1}\|}$ şi obţinem

$$\left(e_{k+1}, e_j\right) = \frac{1}{\|z_{k+1}\|} \left(z_{k+1}, e_j\right) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \qquad (2)$$

Avem

$$e_{k+1} = \frac{1}{\|z_{k+1}\|} \sum_{j=1}^{k} \gamma_j y_j + \frac{1}{\|z_{k+1}\|} y_{k+1},$$

$$y_{k+1} = z_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k+1)} e_j = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(k+1)} e_j + \|z_{k+1}\| e_{k+1}.$$

De aici şi din (1) –(2)

rezultă $e_j \perp e_i$ $(j \neq i;\ i, j \leq k+1)$, $L\left(\{y_j\}_1^{k+1}\right) = L\left(\{e_j\}_1^{k+1}\right)$.

Conform principiului inducţiei matemetice, există un sistem ortonormat $\{e_j\}$, astfel încît

$$L\left(\{y_j\}_1^{n}\right) = L\left(\{e_j\}_1^{n}\right)$$

pentru orice n. Teorema este demonstrată.

Este evident acum, că dacă sistemul de vectori $\{y_j\}$ este complet în spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$, atunci aplicînd metoda de ortogonalizare Gram-Schmidt, obţinem un sistem ortonormat complet în $\mathcal{H}$.

§ 35. Serii Fourier în spaţii Hilbert

Prin ω vom nota un număr natural n sau ∞.

Fie $\{e_j\}_1^{\omega}$ un sistem ortonormat (finit sau numărabil) în spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$. Pentru orice $x \in \mathcal{H}$ numerele

$$c_j = (x, e_j) \quad (j = 1,2, \dots)$$

se numesc coeficienţii Fourier ai vectorului *x* în raport cu sistemul $\{e_j\}_1^{\omega}$, iar " seria "

$$\sum_{j=1}^{\omega} c_j e_j = \sum_{j=1}^{\omega} (x, e_j) e_j \qquad (1)$$

se numeşte seria Fourier a elementului *x*.

Observaţie. Dacă $\omega = n \in N$, atunci seria Fourier se transformă într-o sumă finită de elemente ale spaţiului $\mathcal{H}$.

<u>Teorema 1</u>. Suma parţială

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$$

a seriei (1) este proiecţia vectorului *x* pe subspaţiul $\mathcal{H}_n = L\left(\{e_j\}_1^n\right)$.

Demonstraţie. Să arătăm că $x - s_n \perp \mathcal{H}_n$. Într-adevăr

$$(x - s_n, e_j) = (x, e_j) - (s_n, e_j) = c_j - \sum_{k=1}^{n} c_k (e_k, e_j) = c_j - c_j = 0(\; j = 1,2, \dots, n),$$

ceea ce implică $x - s_n \perp L\left(\{e_j\}_1^n\right) = \mathcal{H}_n$. Evident, $s_n \in \mathcal{H}_n$. Prin urmare $x = s_n + (x - s_n)$ cu $s_n \in \mathcal{H}_n$, $x - s_n \perp \mathcal{H}_n$, ceea ce arată că $s_n = \mathrm{pr}_{\mathcal{H}_n} x$.

Din această teoremă şi observaţia din §33 imediat rezultă

Consecinţa 1. Pentru orice

$$z = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \in \mathcal{H}$$

avem

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} (x, e_j) e_j \right\| \leq \left\| x - \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\|,$$

adică suma parţială a seriei Fourier a elementului x reprezintă elementul de cea mai bună aproximație a lui x cu elemente din $\mathcal{H}_n$.

Consecința 2. Pentru orice $x \in \mathcal{H}$ are loc inegalitatea

$$\sum_{j=1}^{\omega} \left|(x, e_j)\right|^2 \leq \|x\|^2 \ , \qquad (2)$$

numită inegalitatea Bessel.

Într-adevăr, aplicînd teorema Pitagora, obținem

$$\|x\|^2 = \|s_n + (x - s_n)\|^2 = \|s_n\|^2 + \|x - s_n\|^2 \geq \|s_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left|(x, e_j)\right|^2$$

și deci

$$\sum_{j=1}^{n} \left|(x, e_j)\right|^2 \leq \|x\|^2 \qquad (3)$$

Aşadar inegalitatea (2) este demonstrată pentru orice număr natural n, adică pentru $\omega < \infty$. Trecînd la limită în (3) cu $n \to \infty$, obţinem (2) şi pentru cazul $\omega = \infty$.

Dacă pentru un element oarecare $x \in \mathcal{H}$ in inegalitatea Bessel are loc semnul “egal”, atunci se spune că pentru acest element x este adevărată egalitatea Parseval.

<u>Teorema 2.</u> Seria Fourier (1) a oricărui element $x \in \mathcal{H}$ este convergentă. Suma s a acestei serii este proiecţia vectorului x pe subspaţiul

$$\mathcal{H}_0 = \overline{L\left(\{e_j\}_1^{\omega}\right)}.$$

Suma seriei Fourier a elementului x este egală cu x, dacă şi numai dacă pentru elementul x este adevărată egalitatea Parseval.

Demonstraţie. Convergenţa seriei Fourier a elementului x rezultă imediat din inegalitatea Bessel şi teorema 2 §31, deoarece

$$\left\|(x, e_j)e_j\right\| = \left|(x, e_j)\right|$$

şi $e_j \perp e_k, j \neq k$.

Fie s suma seriei Fourier

$$s = \sum_{j=1}^{\omega} c_j e_j.$$

Atunci din aceeaşi teoremă avem

$$\|s\|^2 = \sum_{j=1}^{\omega} |c_j|^2.$$

Este evident că $s \in \mathcal{H}_0$. Să arătăm că $x - s \perp \mathcal{H}_0$. Utilizînd continuitatea şi liniaritatea produsului scalar, obţinem

$$(x - s, e_j) = (x, e_j) - (s, e_j) = c_j - \left(\sum_{k=1}^{\omega} c_k e_k, e_j\right) = c_j - \sum_{k=1}^{\omega} c_k (e_k, e_j) = c_j - c_j = 0.$$

De aici $x - s \perp e_j (j = 1,2, \dots)$, $x - s \perp L\left(\{e_j\}_1^{\omega}\right)$ şi deci $x - s \perp \overline{L\left(\{e_j\}_1^{\omega}\right)} = \mathcal{H}_0$.

Prin urmare $s = \mathrm{pr}_{\mathcal{H}_0} x$.

În continuare avem (aplicînd teorema Pitagora)

$$\|x\|^2 = \|s + (x - s)\|^2 = \|s\|^2 + \|x - s\|^2 = \sum_{j=1}^{\omega} |c_j|^2 + \|x - s\|^2.$$

De aici obţinem : $s = x$, dacă şi numai dacă

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\omega} |c_j|^2,$$

adică pentru elementul x este adevărată egalitatea Parseval.

Rezumînd cele demonstrate aici şi în paragrafele precedente, ajungem la

Teorema 3. Fie $\{e_j\}_1^\omega$ un sistem ortonormat în spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$. Următoarele condiţii sînt echivalente:

1) sistemul $\{e_j\}_1^\omega$ este total în $\mathcal{H}$;

2) sistemul $\{e_j\}_1^\omega$ este complet în $\mathcal{H}$;

3) pentru orice $x \in \mathcal{H}$ avem

$$x = \sum_{j=1}^{\omega} c_j e_j \quad \left(c_j = \left(x, e_j\right)\right);$$

4) pentru orice $x \in \mathcal{H}$ este adevărată egalitatea Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\omega} \left|c_j\right|^2.$$

Demonstraţie. Conditiile (1) şi (2) sînt echivalente conform teoremei 1 §34, iar (3) şi (4) $-$ conform teoremei 2. Să demonstrăm implicaţia 3) $\rightarrow$ 1). Dacă $x \perp e_j$ ($\forall$ j), atunci $c_j = \left(x, e_j\right) = 0$ şi din 3) rezultă $x = \sum_{j=1}^{\omega} c_j e_j$=0, adică sistemul $\{e_j\}_1^\omega$ este total. Sa demonstrăm implicaţia 1) $\rightarrow$ 3). Fie $s = \sum_{j=1}^{\omega} c_j e_j$. În demonstratia teoremei 2 a fost stabilit, ca $x - s \perp e_j$ ($\forall$ j). Întrucît sistemul $\{e_j\}_1^\omega$ este total, de aici rezultă egalitatea $x - s = 0$ şi deci $x = \sum_{j=1}^{\omega} c_j e_j$. Teorema este demonstrată.

Să observăm , că dacă $\{e_j\}_1^\omega$ este un sistem ortonormat şi $x = \sum_{j=1}^{\omega} \xi_j e_j$, atunci ξ_j=c_j ($\forall$ j). Într-adevăr, $c_j = \left(x, e_j\right) = \left(\sum_{k=1}^{\omega} \xi_k e_k \, , e_j\right) =$

$= \sum_{k=1}^{\omega} \xi_k \left(e_k, e_j\right) = \xi_j$.

De aici şi din teorema 2 obţinem

Teorema 4. Pentru ca un sistem ortonormat $\{e_j\}_1^\omega$ să fie o bază ortonormată în spaţiul Hilbert $\mathcal{H}$ este necesar şi suficient să fie îndeplinită una din următoarele condiţii echivalente:

l) sistemul $\{e_j\}_1^{\omega}$ este total;

2) sistemul $\{e_j\}_1^{\omega}$ este complet;

3) orice vector $x \in \mathcal{H}$ se poate reprezenta sub forma

$$x = \sum_{j=1}^{\omega} \xi_j e_j\ ;$$

4) pentru orice $x \in \mathcal{H}$ este adevarata egalitatea Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\omega} \left|(x, e_j)\right|^2.$$

Să mai observăm, că orice spaţiu Hilbert separabil conţine sisteme ortonormate totale (conform teoremei 3, § 34), adică baze ortonormate.

§ 36. Izomorfismul spaţiilor Hilbert separabile

<u>Teoremă.</u> Orice două spaţii Hilbert separabile reale (complexe) infinit dimensionale sînt izomorfe şi izometrice.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{H}_1$ şi $\mathcal{H}_2$ $-$ două spaţii Hilbert separabile reale (complexe) cu $dim\mathcal{H}_1 = dim\mathcal{H}_2 = \infty$ şi $\{e_j\}_1^{\infty}, \{\varphi_j\}_1^{\infty}$ $-$ două baze ortonormate ale acestor spaţii.

Pentru orice $x \in \mathcal{H}_1$ avem

$$x = \sum_{k=1}^{\omega} c_k e_k \quad \big(c_k = (x, e_k)\big).$$

Din egalitatea Parseval obţinem

$$\|x\|^2 = \textstyle\sum_{k=1}^{\omega} |c_k|^2. \qquad (1)$$

Vectorii $\{c_k \varphi_k\}_1^{\omega}$ sunt ortogonali doi cîte doi şi deci, conform teoremei 2 § 31, seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \qquad (2)$$

converge, dacă şi numai dacă este convergentă seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| c_k \varphi_k \right\|^2.$$

Însă $\left\| c_k \varphi_k \right\| = |c_k| \cdot \left\| \varphi_k \right\| = |c_k|$ $(k = 1,2, \ldots)$ şi deci din convergenţa seriei (1) rezultă convergenţa seriei (2). Fie

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k = y \in \mathcal{H}_2.$$

Considerăm acum aplicaţia $f : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ definită de relaţia $f(x) = y$, unde

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k , \qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

Se vede uşor, că aplicaţia f este liniară: $f(x + \tilde{x}) = f(x) + f(\tilde{x})$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ pentru orice $x, \tilde{x} \in \mathcal{H}_1$ și $\alpha \in R$ (respectiv $\alpha \in C$) .

Aplicaţia f este injectivă. Într-adevăr, fie $f(x) = f(\tilde{x})$. Dacă

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k , \quad \tilde{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k ,$$

atunci

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k , \qquad f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \varphi_k .$$

Însă $\{\varphi_k\}_1^{\infty}$ este o bază ortonormată a spaţiului $\mathcal{H}_2$ şi deci relaţia $f(x) = f(\tilde{x})$ implică $\alpha_k = \beta_k$ $(k = 1,2, \ldots)$, ceea ce la rîndul său implică $x = \tilde{x}$.

Aplicaţia f este surjectivă. Dacă $y \in \mathcal{H}_2$, atunci

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \varphi_k.$$

Pentru vectorul $x = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e_k \in \mathcal{H}_1$ avem $f(x) = y$. Prin urmare, aplicaţia f este bijectivă.

Să arătăm că f păstrează produsul scalar a oricăror doi vectori. În adevăr, fie

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, \qquad \tilde{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k.$$

şi deci

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k, \qquad f(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \varphi_k.$$

Avem

$$(x, \tilde{x}) = \left(x, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\beta_k}(x, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k}$$

$$(f(x), f(\tilde{x})) = \left(f(x), \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \varphi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\beta_k}\big(f(x), \varphi_k\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overline{\beta_k}$$

şi , prin urmare, $(f(x), f(\tilde{x})) = (x, \tilde{x})$.

În particular, dacă $x = \tilde{x}$, atunci obţinem $\|f(x)\| = \|x\|$. Deoarece aplicaţia f este liniară, avem

$$\|f(x) - f(z)\| = \|f(x - z)\| = \|x - z\|,$$

adică f este o aplicaţie izometrică. Orice izometrie este continuă. Aplicaţia $f^{-1}: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ este de asemenea izometrică şi, prin urmare, este şi continuă. Deci f este o aplicaţie izomorfă şi izometrică a spaţiului $\mathcal{H}_1$ pe spaţiul $\mathcal{H}_2$.

Consecinţă. Orice spaţiu Hilbert separabil infinit dimensional real (complex) este izomorf şi izometric cu spaţiul l_2 real (complex). În particular, spaţiul $L_2[a,b]$ este izomorf şi isometric cu spaţiul l_2.

Observaţie. Fie $\mathcal{H}_1$ şi $\mathcal{H}_2$ – două spaţii Hilbert finit dimensionale reale (complexe) de aceeaşi dimensiune m. Dacă $\{e_j\}_1^m$ şi $\{\varphi_j\}_1^m$ sint două baze ortonormate ale spatiilor $\mathcal{H}_1$ şi $\mathcal{H}_2$ respectiv, atunci evident, aplicaţia $f : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$, definită prin formula

$$f\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j ,$$

stabileşte un izomorfism isometric al spaţiului $\mathcal{H}_1$ şi $\mathcal{H}_2$. Prin urmare, teorema demonstrată mai sus este adevărată şi în cazul spaţiilor Hilbert finit dimensionale de aceeaşi dimensiune.

§ 37. Baze ortonormate în unele spații concrete

1. În spațiul l_2 considerăm sistemul de vectori $\{e_k\}_1^\infty \left(e_k = \left(\underbrace{0,\dots,0,1}_{k}, 0, \dots\right)\right)$. Acest sistem este ortonormat . El este şi total. Într-adevăr, fie $x = (\xi_k)_1^\infty$ şi $(x, e_k) = 0$ $(k = 1,2,\dots)$. Întrucit $(x, e_k) = \xi_k$, obţinem $x = 0$. Prin urmare, sistemul $\{e_k\}_1^\infty$ constitue o bază ortonormată a spațiului Hilbert l_2.
2. În spațiul $L_2[-\pi, \pi]$ considerăm sistemul trigonometric

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \dots$$

Se vede uşor că

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mt\, dt = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos mt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin mt \, dt = 0 \ (m \neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt\right)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt\right)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 dt = 1,$$

ceea ce arată că sistemul trigonometric este ortonormat. Conform teoremei 5, § 27, acest sistem este şi complet şi deci formează o bază ortonormată a spaţiului $L_2[-\pi, \pi]$.

Prin urmare, orice funcţie $x \in L_2[-\pi, \pi]$ se dezvoltă în seria Furier a ei în raport cu sistemul trigonometric:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n \cos nt + b_n \sin nt + \cdots, \qquad (1)$$

unde

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt \, dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt \, dt.$$

Seria (1) converge în spaţiul $L_2[-\pi, \pi]$.

Dacă vom considera spaţiul $L_2[-1, 1]$, atunci din cele de mai sus cu uşurinţă se deduce că sistemul

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \pi t, \sin \pi t, \ldots, \cos \pi nt, \sin \pi nt, \ldots$$

constituie o bază ortonormată a acestui spaţiu.

4) În spaţiul $L_2[0, 1]$ considerăm sistemul

$$\left\{e^{2\pi nti}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\} \qquad (2)$$

Sistemul este ortonormat, deoarece

$$\int_0^1 e^{2\pi nti} \cdot \overline{e^{2\pi kti}}\, dt = \begin{cases} 0, n \neq k \\ 1, n = k. \end{cases}$$

Conform formulelor Euler, avem

$$\cos 2\pi nt = \frac{e^{2\pi nti} + e^{-2\pi nti}}{2}$$

$$\sin 2\pi nt = \frac{e^{2\pi nti} - e^{-2\pi nti}}{2i}.$$

Întrucît sistemul $1, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t, \dots, \cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt, \dots$ este complet în $L_2[0, 1]$, combinaţiile liniare ale acestor funcţii formează o mulţime peste tot densă în $L_2[0, 1]$.

Prin urmare combinaţiile liniare ale funcţiilor $\{e^{2\pi nt_i} = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ formează o mulţime peste tot densă în $L_2[0, 1]$.

Deci sistemul (2) este un sistem ortonormat şi complet în $L_2[0, 1]$, adică este o bază ortonormată a spaţiului $L_2[0, 1]$. Prin urmare, pentru orice $x \in L_2[0, 1]$ avem

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi nti} \qquad \left(c_n = \int_0^1 x(t) e^{-2\pi nti} dt\right) \tag{3}$$

şi această serie converge în $L_2[0, 1]$. Seria (3) se numeşte seria Fourier a elementului x în formă complexă.

5) În spaţiul $L_2[-1, 1]$ sistemul $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ este liniar independent, dar nu este ortogonal. Utilizînd metoda Gram-Schmidt,obtinem un sistem ortonormat $\{P_n(t)\}_0^\infty$. Sistemul $\{t^n\}_0^\infty$ este complet (teorema 4, **§ 27)** , şi deci complet este şi sistemul $\{P_n(t)\}_0^\infty$. Prin urmare, $\{P_n(t)\}_0^\infty$ este un sistem ortonormat şi complet în $L_2[-1, 1]$, şi deci constitue o bază ortonormată a spaţiului $L_2[-1, 1]$. Se poate demonstra că

$$P_n(t) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n \cdot n! \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \cdot (t^2 - 1)^n \quad (n = 0,1,2, \dots).$$

Polinoamele

$$L_n(t) = \frac{1}{n! \cdot 2^n} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \cdot (t^2 - 1)^n \qquad (n = 0,1,2, \dots)$$

se numesc polinoame Legendre. Prin urmare,

$$P_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot L_n(t) \,.$$

De aici rezultă că orice funcţie $x \in L_2[-1, 1]$ se reprezintă sub forma

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(t) \qquad (4)$$

cu

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} x(t) L_n(t) dt.$$

Seria (4) converge în $L_2[-1, 1]$.

BIBLIOGRAFIE

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. – Минск: Университетское, 1984.

2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М., Наука, 1977.

3. Колмогоров А. Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М., Наука, 1989.

4 Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа.– М., Наука, 1965

5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа.

– М., Высшая школа, 1982.

6.Антоневич А.Б., Князев П.Н., Радыно Я.В. Задачи и упражнения по функциональному анализу– Минск: Вышэйшая школа, 1978.

7. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М., Наука, 1979.

8. Крупник Н.Я., Руссу Г.И. Лабораторный практикум по функциональному анализу.– Кишинев. Молдавский госуниверситет. 1990. Часть I.

9. Cristescu Romulus, Elemente de analiză functională. – Bucureşti, 1975.

10. Gaşpar Dumitru. Analiză functională. – Timişoara, 1981.

11. Ghica Alexandru. Analiză functională. – Bucureşti ,1967.

12. Ionescu – Tulcea C.T. Spaţii Hilbert. – Bucureşti ,1956.

13. Marinescu G. Tratat de analiză functională. – Bucureşti ,1970. – Vol. 1.